# O superalgebrama

Ajda Fošner
University of Primorska
Faculty of Management
Cankarjeva 5
SI-6104 Koper
Slovenia
ajda.fosner@fm-kp.si

Maja Fošner
University of Maribor
Faculty of Logistics
Mariborska cesta 2
SI-3000 Celje
Slovenia
maja.fosner@uni-mb.si

**Sažetak**

U članku uvodimo definiciju asocijativne superalgebre, osnovna svojstva, te dajemo neke primjere.

*2000 Math. Subj. Class.*: 17A70.

## 1 Uvod

U posljednjih nekoliko desetljeća, jedna od najplodonosnijih tema iz algebre jest nedavno razvijena teorija graduiranih algebri, te takozvanih superalgebri. U [12], Kac tvrdi da se interes za područje superalgebri pojavio u fizici, u teoriji "supersimetrije". Mnogo rezultata o superalgebrama i graduiranim algebrama napisali su Martinez, Zelmanov, Wall, Shestakov i drugi (za primjer vidi [7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15]). Osnovni cilj ovog rada je uvesti definiciju asocijativne superalgebre, dati ponešto primjera i prezentirati osnovna svojstva.

Pod algebrom ćemo podrazumijevati asocijativnu algebru nad poljem $\Phi$. Smatramo da su definicije algebre, modula i ideala poznate. Međutim, napisat ćemo neke definicije i objasniti neka osnovna svojstva algebri. Algebra $\mathcal{A}$ je *jednostavna*, ako je $\mathcal{A}^2 \neq 0$ i ako su 0 i $\mathcal{A}$ jedini ideali u $\mathcal{A}$. Kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ *prosta* ako za nju vrijedi da je produkt bilo kojih dvaju ne-nul ideala opet ne-nul ideal. To je ekvivalentno sljedećoj implikaciji: Ako je $a\mathcal{A}b = 0$ za neke $a, b \in \mathcal{A}$, slijedi da je $a = 0$ ili $b = 0$. Primjer proste algebre je $M_n(\mathbb{C})$, tj. algebra svih $n \times n$ kompleksnih matrica. Kažemo da je algebra *poluprosta* ako nema ne-nul nilpotentnih ideala (ideal $\mathcal{I}$ u algebri $\mathcal{A}$ je *nilpotentan*, ako je $\mathcal{I}^n = 0$ za neki $n \in \mathbb{N}$). To je ekvivalentno svojstvu: ako je $a\mathcal{A}a = 0$ za neki $a \in \mathcal{A}$, tada je $a = 0$. Svaka prosta algebra je i poluprosta. Obrat, međutim, općenito ne vrijedi. Posebno, ako je $\mathcal{A} \neq 0$ prosta algebra, tada je $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ poluprosta algebra koja nije prosta.

# 2 Superalgebre

Dragi čitatelji, u ovom poglavlju pozivamo vas u svijet superalgebri. Uvest ćemo neke osnovne definicije te prikazati neke primjere asocijativnih superalgebri.

*Superalgebra* je $\mathbb{Z}_2$-graduirana algebra. To znači da postoje $\Phi$-podmoduli $\mathcal{A}_0$ i $\mathcal{A}_1$ od $\mathcal{A}$ takvi da vrijedi: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_0$ (što znači da je $\mathcal{A}_0$ podalgebra $\mathcal{A}$), $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$. Kažemo da je $\mathcal{A}_0$ *parni dio*, a $\mathcal{A}_1$ *neparni dio* od $\mathcal{A}$.

*Asocijativna superalgebra* $\mathcal{A}$ je asocijativna $\mathbb{Z}_2$-graduirana algebra. Kažemo da je $\mathcal{A}$ *trivijalna superalgebra* ako je $\mathcal{A}_1 = 0$. Za $a \in \mathcal{A}_k$ (gdje je $k \in \{0, 1\}$) kažemo da je *homogen stupnja* $k$ i pišemo $|a| = k$.

*Graduiran $\Phi$-podmodul* $\mathcal{B}$ asocijativne superalgebre $\mathcal{A}$ je podmodul algebre $\mathcal{A}$ za koji vrijedi

$$\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1.$$

U tom slučaju pišemo $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_0$ i $B_1 = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1$, što znači $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$. Ako je $\mathcal{B}$ graduirana podalgebra od $\mathcal{A}$, tada je $\mathcal{B}$ i asocijativna superalgebra.

*Graduiran ideal* (ili *superideal*) $\mathcal{I}$ superalgebre $\mathcal{A}$ je ideal od $\mathcal{A}$ koji je i graduiran $\Phi$-podmodul, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_1$, ili $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \oplus \mathcal{I}_1$.

Napišimo ponešto o graduiranosti. Prirodno se postavlja pitanje kako opisati $\mathbb{Z}_2$-graduiranost. Za danu asocijativnu superalgebru $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ definirajmo funkciju $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa $(a_0 + a_1)^\sigma = a_0 - a_1$, te primijetimo da je tako definirana funkcija $\sigma$ zapravo automorfizam od $\mathcal{A}$ za koji vrijedi $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Obratno, za danu algebru $\mathcal{A}$ i automorfizam $\sigma$ od $\mathcal{A}$ sa svojstvom $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $\mathcal{A}$ postaje superalgebra definiranjem $\mathcal{A}_0 = \{a \in \mathcal{A} \mid \sigma(a) = a\}$ i $\mathcal{A}_1 = \{a \in \mathcal{A} \mid \sigma(a) = -a\}$ (doista, bilo koji element $a \in \mathcal{A}$ može se prikazati kao $a = \frac{a+a^\sigma}{2} + \frac{a-a^\sigma}{2}$, te je $\frac{a+a^\sigma}{2} \in \mathcal{A}_0$, $\frac{a-a^\sigma}{2} \in \mathcal{A}_1$). Tako reći, $\mathbb{Z}_2$-graduiranje može se karakterizirati preko automorfizma s kvadratom id.

Podmodul $\mathcal{B}$ superalgebre $\mathcal{A}$ je graduiran ako i samo ako je $\mathcal{B}^\sigma = \mathcal{B}$. Neka je centar $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ superalgebre $\mathcal{A}$ upravo centar algebre $\mathcal{A}$ u uobičajenom smislu, tj. $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid ab = ba \ \forall b \in \mathcal{A}\}$. Centar je graduiran, jer svaki automorfizam preslikava centar na centar. To znači da je $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}(\mathcal{A})_0 \oplus \mathcal{Z}(\mathcal{A})_1$.

U sljedećem tekstu prikazat ćemo neke primjere asocijativnih superalgebri.

**Primjer 2.1.** Neka je $\mathcal{A}$ algebra i neka je $c \in \mathcal{A}$ invertibilan element. Nadalje, neka je $\sigma$ automorfizam algebre $\mathcal{A}$ definiran s $x^\sigma = cxc^{-1}$ za sve $x \in \mathcal{A}$. Uočimo da je $\sigma^2 = \mathrm{id}$ ako i samo ako je $c^2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Slijedi da je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ superalgebra, gdje je $\mathcal{A}_0 = \{x \in \mathcal{A} \mid xc = cx\}$ i $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} \mid xc = -cx\}$.

Konkretno, neka je $\mathcal{A} = M_{r+s}(\Phi)$ algebra svih $(r+s) \times (r+s)$ matrica nad $\Phi$, gdje su $r, s \in \mathbb{N}$. Za element $c$ možemo izabrati matricu

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix},$$

gdje je $I_r$ jedinična matrica iz $M_r(\Phi)$ te $I_s$ jedinična matrica iz $M_s(\Phi)$. Tada su parni i neparni dijelovi dani s

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} M_r(\Phi) & 0 \\ 0 & M_s(\Phi) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & M_{r,s}(\Phi) \\ M_{s,r}(\Phi) & 0 \end{bmatrix},$$

gdje $M_{r,s}(\Phi)$ označava skup svih $r \times s$ matrica. Ova algebra je asocijativna superalgebra, koju obično označujemo s $M(r|s)$.

**Primjer 2.2.** Neka je $A$ algebra nad $\Phi$ i stavimo $\mathcal{A} = A \times A$. Nadalje, neka je $\sigma$ automorfizam na $\mathcal{A}$ definiran sa $\sigma(a,b) = (b,a)$, za sve $a, b \in A$. Tada vrijedi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, gdje je parni dio dan s $\mathcal{A}_0 = \{(a,a) \mid a \in A\}$, a neparni s $\mathcal{A}_1 = \{(b,-b) \mid b \in A\}$. Pokaže se da vrijedi:

$$\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{bmatrix} C & D \\ D & C \end{bmatrix} \mid C, D \in A \right\},$$

$$\mathcal{A}_0 \cong \left\{ \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \mid C \in A \right\}, \qquad \mathcal{A}_1 \cong \left\{ \begin{bmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{bmatrix} \mid D \in A \right\}.$$

U ovom slučaju kažemo da je superalgebra $\mathcal{A}$ zadana automorfizmom zamjene.

**Primjer 2.3.** Neka je $\mathcal{A} = Q(\alpha, \beta)$ 4-dimenzionalna algebra nad $\Phi$, s bazom $\{1, uv, u, v\}$. Definirajmo množenje na sljedeći način: $u^2 = \alpha \in \Phi$, $v^2 = \beta \in \Phi$, $uv = -vu$. Posebno, $\mathcal{A}$ je algebra kvaterniona nad $\mathbb{R}$. Stavimo $\mathcal{A}_0 = \Phi 1 + \Phi uv$ i $\mathcal{A}_1 = \Phi u + \Phi v$. Vrijedi da je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ asocijativna superalgebra, koju zovemo superalgebra kvaterniona.

Navedimo neka osnovna svojstva asocijativnih superalgebri. Asocijativna superalgebra $\mathcal{A}$ je *jednostavna*, ako nema pravih ne-nul graduiranih ideala. Jedini graduirani ideali su 0 i cijela superalgebra $\mathcal{A}$. Primijetimo da jednostavna superalgebra ne mora biti jednostavna i kao algebra. Ako produkt dvaju ne-nul graduiranih ideala superalgebre $\mathcal{A}$ uvijek bude različit od 0, kažemo da je $\mathcal{A}$ *prosta superalgebra*. Superalgebra $\mathcal{A}$ je *poluprosta*, ako nema ne-nul nilpotentnih graduiranih ideala. Kao što je zabilježeno u [1], to je ekvivalentno implikaciji da $a\mathcal{A}b = 0$ povlači da je $a = 0$ ili $b = 0$, gdje su $a$ i $b$ bilo koji *homogeni elementi* u $\mathcal{A}$. Zapravo, isti zaključak i dalje vrijedi ako pretpostavimo da je samo jedan od tih dvaju elemenata, recimo $b$, homogen.

Neka je $\mathcal{A}$ prosta superalgebra. Prirodno se javlja pitanje jesu tada i algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}_0$ proste. Sljedeća dva primjera pokazuju da to ne mora vrijediti uvijek.

**Primjer 2.4.** Neka je $A$ prosta algebra nad $\Phi$ i neka je $\mathcal{A} = A \times A$ superalgebra s graduiranošću definiranom kao u primjeru 2.2. Ova algebra je prosta superalgebra (produkt bilo kojih dvaju ne-nul graduiranih ideala je različit od 0), ali nije prosta algebra, jer $(0 \times A)(A \times 0) = 0$.

**Primjer 2.5.** Superalgebra $M(r|s)$ je prosta superalgebra. Skupovi

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid C \in M_r(\mathbb{F}) \right\} \quad \text{i} \quad \mathcal{J} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \mid D \in M_s(\mathbb{F}) \right\}$$

su ne-nul ideali u algebri $M(r|s)_0$ takvi da im je produkt 0. Stoga algebra $M(r|s)_0$ nije prosta algebra.

Veza između proste superalgebre (ili poluproste superalgebre) $\mathcal{A}$ i prostih algebri (ili poluprostih algebri) $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}_0$ je sljedeća: Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna poluprosta superalgebra, tada su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}_0$ također poluproste algebre. Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna prosta superalgebra, tada je ili $\mathcal{A}$ prosta algebra, ili $\mathcal{A}_0$ prosta algebra. Dokazi tih rezultata mogu se vidjeti u [13].

# 3 Zaključak

Prirodno pitanje koje se postavlja jest kako generalizirati neke klasične strukture. Opišimo ukratko pozadinu toga. Naprimjer, neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra. Uvođenjem novog produkta u $\mathcal{A}$ (takozvanog Jordanovog produkta) $a \circ b = ab + ba$, $\mathcal{A}$ postaje Jordanova algebra, koju obično označujemo s $\mathcal{A}^+$. Postavlja se pitanje veze između strukturalnih svojstava algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^+$ (naprimjer, svaki ideal u algebri $\mathcal{A}$ je ideal i u $\mathcal{A}^+$; vrijedi li obrat?). Takva pitanja razmatrao je Herstein 1950-ih (vidi [10]). Promatrao je većinom jednostavne algebre. U posljednje vrijeme njegova je teorija generalizirana. Na tu temu dosta su radova napisali Lanski, Martindale, McCrimmon, Miers, Montgomery i mnogi drugi. Na sličan način možemo uvesti Jordanove superalgebre. Ponovo se nameće isto pitanje: Koja je veza između struktura superalgebri i Jordanovih superalgebri? Čitatelja upućujemo da vidi primjerice [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13].

Na kraju, naznačimo da možemo proširiti pojam superalgebre na $\mathcal{G}$-graduirane algebre, gdje je $\mathcal{G}$ neka Abelova grupa. Algebru zovemo $\mathcal{G}$-graduirana ako postoje potprostori $\mathcal{A}_g$, $g \in \mathcal{G}$, od $\mathcal{A}$, takvi da je $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} \mathcal{A}_g$ i $\mathcal{A}_g\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{gh}$ za sve $g, h \in \mathcal{G}$. Superalgebre su zapravo posebni slučajevi $\mathcal{G}$-graduiranih algebri. U tom slučaju $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2$. U kontekstu $\mathcal{G}$-graduiranih algebri možemo također definirati pojmove popout modula, ideala, graduiranih prostih algebri ... Stoga se prirodno javljaju mnogi novi problemi.

# Literatura


[1] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, Jordan superhomomorphisms, *Comm. Algebra* 31 (2003), 633.–644.

[2] M. Brešar, A. Fošner, M. Fošner, Jordan ideals revisited, *Monatsh. Math.*, 1 (2005), 1.–10.

[3] M. Fošner, Jordan superderivations, *Comm. Algebra* 31 (2003), 4533.–4545.

[4] M. Fošner, Jordan superderivations, II, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 2004 (2004), 2357.–2369.

[5] M. Fošner, On the extended centroid of prime associative superalgebras with applications to superderivations, *Comm. Algebra* 32 (2004), 689.–705.

[6] M. Fošner, Asociativne superalgebre in jordanske strukture, doktorska disertacija, Maribor 2004.

[7] C. Gómez-Ambrosi, J. Laliena, I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a prime superalgebra with superinvolution, *Comm. Algebra* 2 (2000), 3277.–3291.

[8] C. Gómez-Ambrosi, F. Montaner, On Herstein's constructions relating Jordan and associative superalgebras, *Comm. Algebra* 28 (2000), 3743.–3762.

[9] C. Gómez-Ambrosi, I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with superinvolution, *J. Algebra* 208 (1998), 43.–71.

[10] I. N. Herstein, Topics in ring theory, The University of Chicago Press, Chicago 1969.

[11] V. G. Kac, Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, *Comm. Algebra* 13 (1977), 1375.–1400.

[12] V. G. Kac, Lie superalgebras, *Advances in mathematics* 26 (1977), 8.–96.

[13] F. Montaner, On the Lie structure of associative superalgebras, *Comm. Algebra* 26 (1998), 2337.–2349.

[14] S. Montgomery, Constructing simple Lie superalgebras from associative graded algebras, *J. Algebra* 195 (1997), 558.–579.

[15] I. P. Shestakov, Prime alternative superalgebras of arbitrary characteristic, *Algebra and logic* 36 (1997), 389.–420.