Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički Odjel

Goran Malić

Arbelos

Mentor: prof. Zvonko Čerin

Zagreb, travanj 2007.

Sadržaj

1 Uvod

Arbelos ili postolarev nož je lik omeđen trima međusobno tangentnim polukružnicama s kolinearnim središtima. Tim su se likom bavili starogrčki matematičari Arhimed[1] i Pappus[2].

Arhimed je unutar arbelosa uočio dvije istaknute kružnice jednakog radijusa, koje je spomenuo i u svojoj "Knjizi Lema", dok je Pappus zaključio da je arbelos ispunjen tangentnim kružnicama. Njihov je rad, nakon gotovo dvije tisuće godina, obradio i popularizirao Leon Bankoff, uvođenjem nekoliko novih sličnih kružnica.

Na Bankoffov rad se osvrnula grupa matematičara; Dodge, Schoch, Woo i Yiu koji su u članku [3] kategorizirali tzv. Arhimedove kružnice i sažeto spomenuli sve zanimljivosti vezane uz njih. Nedugo zatim, Okumura i Watanabe daju nekoliko generalizacija, Lamoen uvodi dvadesetak novih zanimljivih kružnica, sličnih onima koje je Arhimed primijetio, a Čerin ukazuje na vezu između arbelosa i zlatnog omjera.

Ovaj rad je osvrt na teorije navedenih matematičara, njihov usustavljeni prikaz s dokazima te bi kao takav trebao približiti i objasniti svojstva arbelosa, lika što je inspirirao brojne matematičare.

Posebno zahvaljujem prof. Zvonku Čerinu što je prihvatio i podržao ideju o ovom radu te pomogao pri njegovoj realizaciji, a ponajviše što me upoznao s arbelosom, likom koji već dva tisućljeća zadivljuje zaljubljenike u matematiku.

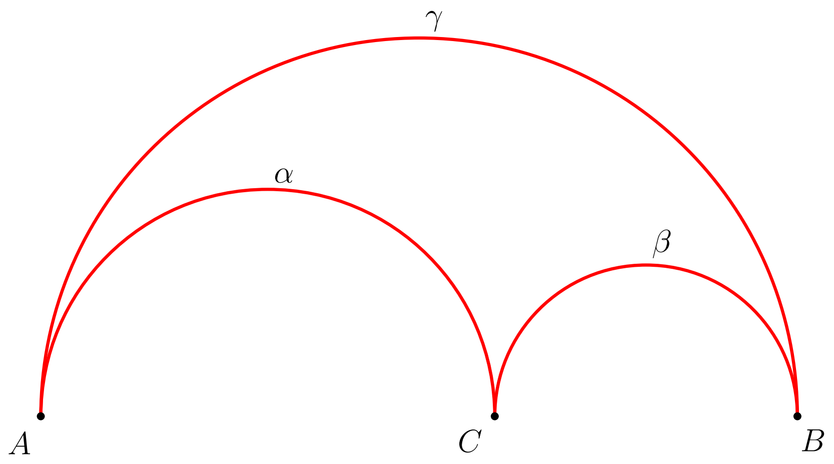
[1] Arhimed (287. - 212. pr. Kr.), grčki matematičar, smatra se najvećim matematičarom svog doba.

[2] Pappus Aleksandrijski (oko 340. g. poslije Krista), helenizirani Egipćanin, smatra se posljednjim grčkim geometrom i utemeljiteljem projektivne geometrije.

2 Definicije i osnovna svojstva arbelosa

Započnimo s formalnom definicijom arbelosa.

Definicija 2.1. *Lik omeđen trima međusobno tangentnim polukružnicama sa kolinearnim središtima zovemo arbelos.*



Slika 1.

Polukružnice ćemo označavati s α, β i γ kao na 1. slici, njihove radijuse s r_1, r_2 i r, a dijametre s d_1, d_2 i d. Središta polukružnica α, β i γ ćemo označavati sa O_1, O_2 i O, a pravac na kojem se nalaze središta s AB, gdje je točka A presjecište tog pravca i polukružnice α, a točka B presjecište tog pravca i polukružnice β. Točkom C ćemo označavati zajedničko presjecište polukružnica α i β i pravca AB.

Često ćemo spominjati razne kružnice pa u tu svrhu kružnicu sa središtem u točki S ćemo označavati sa (S), a kružnicu sa središtem u točki S i radijusom $|ST|$ ćemo označavati sa $S(T)$. Analogno ćemo označavati i razne polukružnice.

Krenimo od osnovnih, ali ne i očiglednih svojstava arbelosa.

Propozicija 2.1. *Opseg arbelosa jednak je $d\pi$.*

Dokaz. Promjer polukružnice α je d_1 pa je promjer polukružnice β jednak $d - d_1$. Iz toga slijedi da je opseg arbelosa

$$\frac{1}{2}(d\pi + d_1\pi + (d - d_1)\pi) = d\pi.$$

□

Propozicija 2.2. *Površina arbelosa iznosi $\frac{\pi}{4}d_1d_2$.*

Dokaz. Promjer polukružnice α je d_1 pa je promjer polukružnice β jednak $d - d_1$. Tada je $d_2 = d - d_1$, a površina arbelosa

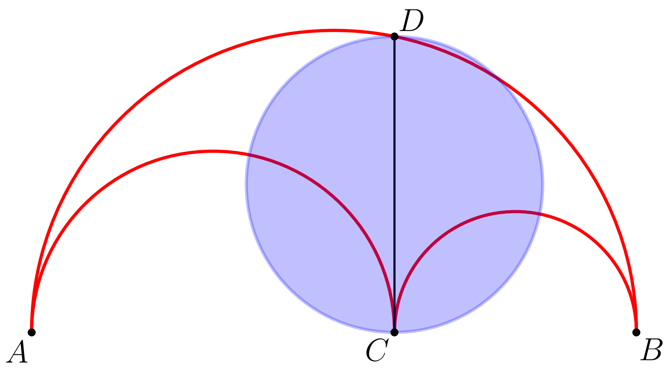
$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{d-d_1}{2}\right)^2\pi\right) = \frac{\pi}{4}d_1 d_2.$$

□

Često ćemo koristiti i pravac koji je u točki C okomit na pravac AB. U tu svrhu definiramo i točku D kao presjecište polukružnice γ i pravca okomitog na pravac AB u točki C.

Prvi zanimljiviji rezultat se odnosi na površinu kružnice čiji je promjer jednak $|CD|$.

Propozicija 2.3. *Površina kružnice promjera $|CD|$ jednaka je površini arbelosa.*



Slika 2.

Dokaz. Prema propoziciji 2.2, površina arbelosa je dana s $\frac{\pi}{4}d_1 d_2$. Kako je točka D na polukružnici γ, a $|AB|$ njen promjer, očito je trokut ABD pravokutan, s pravim kutem u točki D. Tada je $|CD|$ visina pravokutnog trokuta ABD, pa iz Pitagorinog poučka slijedi

$$|CD|^2 = d_1 d_2.$$

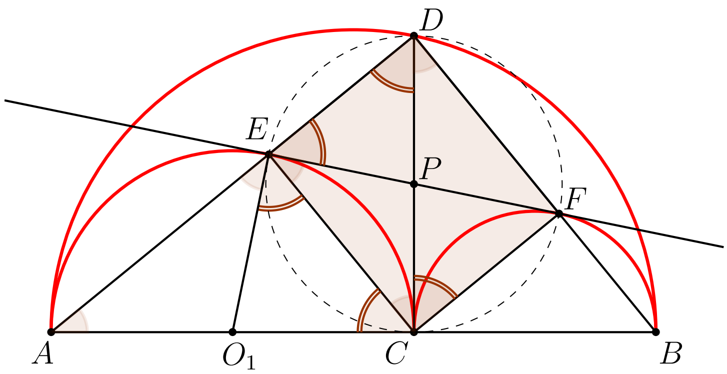
Dakle, površina tražene kružnice je

$$\left(\frac{|CD|}{2}\right)^2\pi = \frac{\pi}{4}d_1 d_2.$$

□

Ovaj rezultat je poznat kao propozicija 4 u Arhimedovoj "Knjizi Lema".

Propozicija 2.4. *Neka je točka E presjecište pravca AD i polukružnice α, a točka F presjecište pravca BD i polukružnice β. Tada je četverokut $CFDE$ pravokutnik.*



Slika 3.

Dokaz. Trokut ADB je pravokutan, s pravim kutom u vrhu D. Tada je $\angle ADC + \angle BDC = 90°$. Trokut BCD je također pravokutan, s pravim kutom u vrhu C. Tada je $\angle BDC + \angle DBC = 90°$. Slično vrijedi i za pravokutni trokut ACD, s pravim kutom u vrhu C, tj. $\angle ADC + \angle DAC = 90°$. Sada vrijedi:

$$\angle ADC + \angle DAC = 90° \Rightarrow \angle ADC = 90° - \angle DAC$$

$$\angle BDC - \angle DAC = 0° \Rightarrow \angle DAC = \angle BDC$$

Znamo da je trokut CFB pravokutan, s pravim kutom u vrhu F, pa je očito da je i trokut CFD pravokutan, s pravim kutom u vrhu F. Dakle, $\angle DCF = \angle ADC$ jer trokuti CFD i ACD imaju dva jednaka kuta. Analogijom možemo doći do zaključka i za trokut DEC.

Dobili smo da trokuti CED i CFD imaju zajedničku stranicu CD te jednake kuteve uz tu stranicu. Prema teoremu KSK, ti su trokuti sukladni, pa je četverokut $CFDE$ pravokutnik.

□

Korolar 2.4.1. *Dužina EF raspolavlja dužinu CD.*

Dokaz. Dužine EF i CD su dijagonale pravokutnika, a dijagonale pravokutnika se raspolavljaju.

□

Propozicija 2.5. *Pravac EF dodiruje polukružnicu α u točki E, a polukružnicu β u točki F.*

Dokaz. Označimo sa P presjecište dužina EF i CD. Tada se točke C, F, D i E nalaze na kružnici sa središtem u točki P i radijusom CD pa slijedi da su trokuti EPC i CPF jednakokračni. Iz propozicije 2.4 znamo da je $\angle DAC = \angle ECP$ pa je, prema tome, i $\angle CEP = \angle DAC$.

Neka je točka O_1 polovište dužine AC. Tada je $|O_1E|=|O_1C|$ pa je trokut CO_1E jednakokračan. Iz propozicije 2.4 znamo da je $\angle ADC = \angle ACE$ pa je i $\angle O_1EC = \angle ADC$. Dakle, vrijedi

$$\angle O_1EC + \angle CEP = \angle ADC + \angle DAC = 90°.$$

Kako je $|O_1E|$ radijus polukružnice α i siječe EF u točki E pod pravim kutem, onda je EF tangenta polukružnice α u točki E. Analognim postupkom se tvrdnja dokazuje i za točku F i polukružnicu β.

□

Teorem 2.1. *Uz oznake kao na slici 4, vrijedi*

1. *Duljina dužine CQ je kvadratna sredina $M_2(d_1, d_2)$.*

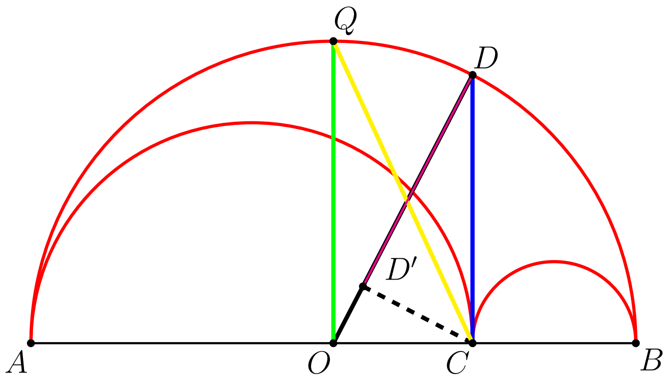
2. *Duljina dužine $OQ = OD$ je aritmetička sredina $M_1(d_1, d_2)$.*

3. *Duljina dužine CD je geometrijska sredina $M_0(d_1, d_2)$.*

4. *Duljina dužine DD', gdje je D' nožište okomice iz točke C na na dužinu OD, je harmonijska sredina $M_{-1}(d_1, d_2)$.*

5. *Ako je $d_1 \geq d_2$, onda vrijedi*

$$d_1 \geq M_2(d_1, d_2) \geq M_1(d_1, d_2) \geq M_0(d_1, d_2) \geq M_{-1}(d_1, d_2) \geq d_2.$$



Slika 4.

Dokaz. 1. Trokut COQ je pravokutan, s pravim kutom u vrhu O. Vrijedi $|OQ| = \frac{d}{2}$, $|OC| = d_1 - \frac{d}{2}$. Prema Pitagorinom poučku vrijedi

$$|CQ|^2 = |OQ|^2 + |OC|^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(d_1 - \frac{d}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{d^2}{4} + d_1^2 - d_1 d + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{2} + d_1^2 - d_1 d = \frac{(d_1 + d_2)^2}{2} + d_1^2 - d_1(d_1 + d_2) =$$

$$\frac{d_1^2 d_2^2}{2} + d_1 d_2 + d_1^2 - d_1^2 - d_1 d_2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{2} \Rightarrow |CQ| = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}} = M_2(d_1, d_2).$$

2. Duljina dužina OQ i OD jednaka je $\frac{d}{2}$, a kako je $d = d_1 + d_2$ tada je očito $|OQ| = |OD| = \frac{d_1 + d_2}{2} = M_1(d_1, d_2)$.

3. Trokut OCD je pravokutan, s pravim kutom u vrhu C. Prema Pitagorniom poučku vrijedi

$$|CD|^2 = |OD|^2 - |OC|^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(d_1 - \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} - d_1^2 + d_1 d - \frac{d^2}{4} =$$

$$d_1(d-d_1) = d_1(d_1+d_2-d_1) = d_1 d_2 \Rightarrow |CD| = \sqrt{d_1 d_2} = M_0(d_1, d_2).$$

4. Trokuti $DD^{'}C$ i $CD^{'}O$ su slični pa vrijedi $\frac{|DD^{'}|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|OD|}$. Dalje vrijedi:

$$|DD^{'}| = \frac{|CD|^2}{|OD|} = \frac{d_1 d_2}{\frac{d_1+s_2}{2}} = \frac{2d_1 d_2}{d_1+d_2} = M_{-1}(d_1, d_2).$$

5. Trokut COQ je pravokutan, s pravim kutom u O. U tom trokutu je $|CQ| = M_2(d_1, d_2)$ hipotenuza, a $|OQ| = M_1(d_1, d_2)$ kateta pa očito vrijedi $M_2(d_1, d_2) \geq M_1(d_1, d_2)$. U pravokutnim trokutima OCD i $CD^{'}D$ analogno pokazujemo $M_1(d_1, d_2) \geq M_0(d_1, d_2) \geq M_{-1}(d_1, d_2)$. Dalje imamo:

$$d_1 = |AC| = |AO| + |OC| = |QO| + |OC| \geq |QC| = M_2(d_1, d_2)$$

$$\begin{aligned} M_{-1}(d_1, d_2) &= |DD^{'}| = |OD| - |OD^{'}| = \\ &= |OB| - |OD^{'}| \geq |OB| - |OC| = |CB| = d_2. \end{aligned}$$

Možemo primijetiti da do jednakosti dolazi kada je $d_1 = d_2$.

□

Ovaj teorem pokazuje kako arbelos sadrži rezultate poput nejednakosti harmonijske, geometrijske, aritmetičke i kvadratne sredine za dvije veličine.

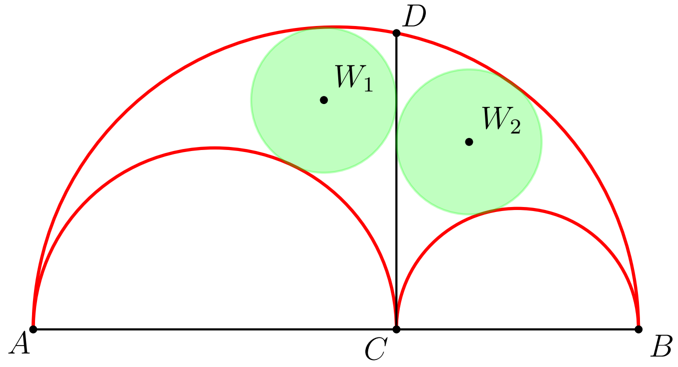
Prvih nekoliko svojstava pokazuju da se doista radi o zanimljivom liku, što za Dodgea nije ništa čudno jer je arbelos, pored svega, trokut kojemu su stranice polukružnice [3].

No ipak, najviše zanimanja za arbelos nisu potakla ova prethodna svojstva, već svojstva kružnica koje je Arhimed primijetio i zabilježio u svojoj "Knjizi Lema". To su tzv. Arhimedove kružnice (u literaturi se ponekad navode i kao "magične kružnice").

Definicija 2.2. *Arhimedova kružnica je svaka kružnica sa radijusom*

$$p = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 r_2}{r},$$

gdje su r_1, r_2 i r radijusi polukružnica α, β i γ koje čine arbelos.



Slika 5.

I prije početka poglavlja možemo uočiti jednu zanimljivost; omjer površine i opsega arbelosa jednak je polovini radijusa Arhimedove kružnice.

3 Familije kružnica u arbelosu

U prethodnom poglavlju spomenuli smo da su Arhimedove kružnice potakle velik interes za proučavanje arbelosa, stoga će u ovom poglavlju biti obrađene neke od najznačajnijih Arhimedovih kružnica.

Iako su sve kružnice, koje će u ovom poglavlju biti navedene, po definiciji Arhimedove, nazivat ćemo ih prema prezimenu osobe koja ih je otkrila, kako bi se jasnije mogle razlikovat pojedine familije kružnica.

Oznake svih familija Arhimedovih kružnica, do Powerovih kružnica, bit će identične onima koje je Dodge koristio u [3], to jest središta će se označavati s W_i, a kružnice sa (W_i), dok će oznake Powerovih i Lamoenovih kružnica biti identične onima koje su Power i Lamoen koristili u [8] i [4].

Od interesa će biti kružnice radijusa p koje su nekim karakterističnim svojstvom vezane uz arbelos, poput npr. kružnica koje imaju zajedničku tangentu s nekom od polukružnica ili kružnica koje sadrže neku karakterističnu točku arbelosa.

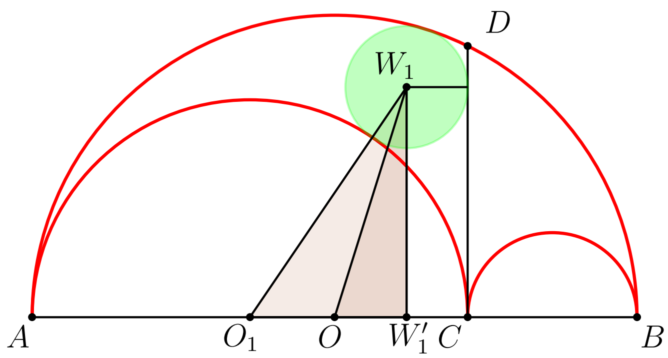
3.1 Arhimedovi blizanci i Bankoffova treća kružnica

Najprije ćemo se baviti dvijema kružnicama koje je otkrio sam Arhimed. Arhimed ih je smatrao specifičnima zbog toga što uz jednake radijuse, obje diraju dva luka arbelosa i pravac CD (vidi sliku 5). Često se nazivaju *Arhimedovim blizancima* (*the twin circles of Archimedes*), očigledno zbog jednakog radijusa, kojeg ćemo odrediti u slijedećem teoremu.

Teorem 3.1. *Radijusi p_1 i p_2 kružnica W_1 i W_2 jednaki su polovici harmonijske sredine od r_1 i r_2, tj.*

$$p_1 = p_2 = p = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}.$$

Dokaz. Neka je O_1 središte polukružnice α, a O središte polukružnice γ. Promotrimo okomice iz točke W_1 na pravce CD i AB i označimo sa W_1' presjecište okomice iz točke W_1 na AB.



Slika 6.

Vrijedi

$$|O_1W_1| = r_1 + p_1,$$
$$|OW_1| = r - p_1 = r_1 + r_2 - p_1,$$
$$|O_1W_1'| = r_1 - p,$$
$$|OW_1'| = r_1 - r_2 - p_1.$$

U pravokutnom trokutu $O_1W_1'W_1$ vrijedi

$$|W_1'W_1^2| = (r_1 + p_1)^2 - (r_1 - p_1)^2,$$

a u pravokutnom trokutu $OW_1'W_1$ vrijedi

$$|W_1'W_1^2| = (r - p_1)^2 - (r_1 - r_2 - p_1)^2 = (r_1 + r_2 - p_1)^2 - (r_1 - r_2 - p_1)^2.$$

Izjednačavanjem predhodnih dviju jednadžbi dobivamo

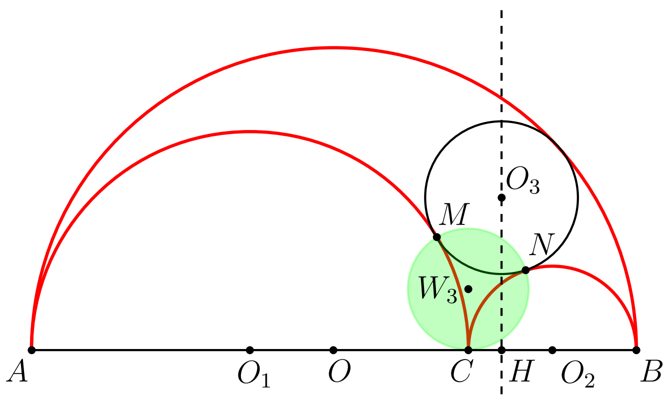
$$4r_1p_1 = 4(r_1 - p_1)r_2 \Rightarrow p_1 = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2} = p$$

Analognim postupkom dokazuje se da je $p_2 = p$.

□

Leon Bankoff[3] je 1974. godine pokazao da *Arhimedovi blizanci* nisu samo blizanci, već dvije kružnice iz trojke kružnica, to jest pokazao je da postoji treća kružnica radijusa p [3] koja je nekim karakterističnim svojstvom vezana uz arbelos. Razmotrimo dakle slijedeći teorem.

Teorem 3.2. *Neka kružnica* (O_3) *dira svaku od polukružnica* α, β *i* γ *u jednoj točki, polukružnicu* α *u točki* M, *a polukružnicu* β *u točki* N. *Tada kružnica* (W_3) *određena točkama* M, N *i* C *ima radijus* $p = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1r_2}{r}$.



Slika 7.

[3]Leon Bankoff (1908-1996), američki zubar i matematičar amater.

Dokaz. Neka je r_3 radijus kružnice (O_3), a h duljina dužine O_3H, gdje je H točka presjecišta pravca AB i okomice iz točke O_3 na pravac AB, te neka je $x = |OH|$.
Jednostavnosti radi, neka je $r = r_1 + r_2 = 1$. Iz pravokutnih trokuta OHO_3, O_1HO_3 i O_2HO_3 vrijedi

$$x^2 + h^2 = (r_1 + r_2 - r_3)^2,$$

$$(r_2 + x)^2 + h^2 = (r_1 + r_3)^2,$$
$$(r_1 - x)^2 + h^2 = (r_2 + r_3)^2.$$

Rješavanjem ovih jednadžbi po h dobivamo

$$2r_2^2 + 2r_2x = -2r_1r_2 + 4r_1r_3 + 2r_2r_3,$$

$$2r_1^2 - 2r_1x = -2r_1r_2 + 2r_1r_3 + 4r_2r_3.$$

Ako prvu jednadžbu pomnožimo s r_1, a drugu s r_2 i potom ih zbrojimo, dobivamo

$$4r_1r_2^2 + 4r_1^2r_2 = 4r_1^2r_3 + 4r_2^2r_3 + 4r_1r_2r_3,$$

iz čega slijedi

$$r_3 = \frac{(r_1 + r_2)r_1r_2}{r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2} = \frac{r_1r_2}{1 - r_1r_2}.$$

Promotrimo sada trokut $O_1O_2O_3$. Duljine njegovih stranica su $|O_1O_2| = r_1 + r_2$, $|O_1O_3| = r_3 + r_1$, $|O_2O_3| = r_2 + r_3$ pa je njegov poluopseg jednak $s = \frac{2(r_1+r_2)+2r_3}{2} = 1 + r_3$. Prema Heronovoj formuli, kvadrat površine tog trokuta dan je s

$$P^2 = (1 + r_3)r_1r_2r_3.$$

(W_3) je kružnica upisana tom trokutu pa je površina trokuta $O_1O_2O_3$ dana i s

$$P = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)p_3 + \frac{1}{2}(r_1 + r_3)p_3 + \frac{1}{2}(r_2 + r_3)p_3.$$

Izjednačavanjem jednadžbi za površinu trokuta $O_1O_2O_3$ dobivamo

$$(1 + r_3)r_1r_2r_3 = (1 + r_3)^2p_3^2.$$

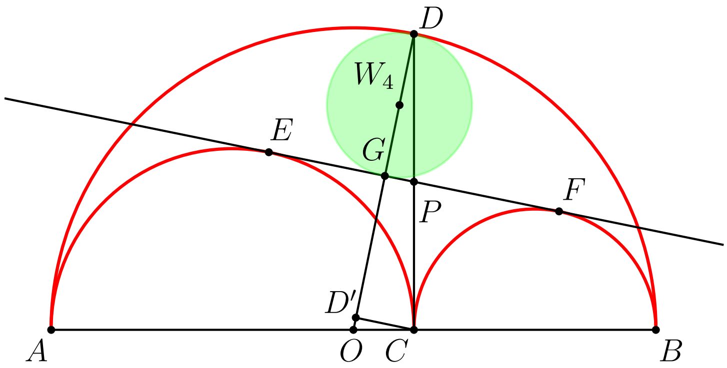
Rješavanjem gornje jednadžbe po p_3 dobivamo da je $p_3^2 = r_1^2r_2^2$, tj.

$$p_3 = r_1r_2 = p.$$

□

Iako se u literaturi (vidi 57. stranicu) najčešće spominje Bankoffova treća kružnica, on je pokazao da postoji još jedna kružnica s radijusom $p = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1r_2}{r}$.

Teorem 3.3. *Neka je pravac EF zajednička tangenta polukružnica α i β, tj. neka EF dira polukružnicu α u točki E, a polukružnicu β u točki F. Tada kružnica, koja iznutra dira polukružnicu γ i pravac EF, ima radijus $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$. Štoviše, ta kružnica dira polukružnicu γ u točki D i to je najmanja kružnica koja prolazi kroz točku D i dira pravac EF.*



Slika 8.

Dokaz. Označimo s (W_4) kružnicu koja iznutra dira polukružnicu γ u točki D i pravac EF u točki G. Iz korolara 2.4.1 znamo da $|CD|$ raspolavlja $|EF|$. Neka je P točka gdje se $|CD|$ i $|EF|$ raspolavljaju. Tada je trokut PGD pravokutan, s pravim kutom u točki G.

Povucimo sada okomicu iz točke C na pravac OD i označimo nožište okomice sa D'. Točke D', G i D se očito nalaze na istom pravcu pa je trokut $CD'D$ pravokutan, s pravim kutom u točki D'. Iz teorema 2.1 znamo da je $|DD'| = \frac{2d_1 d_2}{d_1+d_2}$ i $|CD| = \sqrt{d_1 d_2}$. Također znamo da je $|DP| = \frac{1}{2}\sqrt{d_1 d_2}$. Prema KKK teoremu o sličnosti trokuta, trokuti $CD'D$ i PGD su slični pa vrijedi

$$\frac{|DG|}{|GP|} = \frac{|DD'|}{|DC|}.$$

Dakle,

$$|DG| = |GP|\frac{|DD'|}{|DC|} = \frac{1}{2}\sqrt{d_1 d_2} \quad \frac{\frac{2d_1 d_2}{d_1+d_2}}{\sqrt{d_1 d_2}} = \frac{d_1 d_2}{d_1+d_2} = \frac{2r_1 r_2}{r_1+r_2}.$$

Vidimo da je $|DG|$ promjer kružnice (W_4) pa je tada radijus kružnice (W_4) jednak $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$.

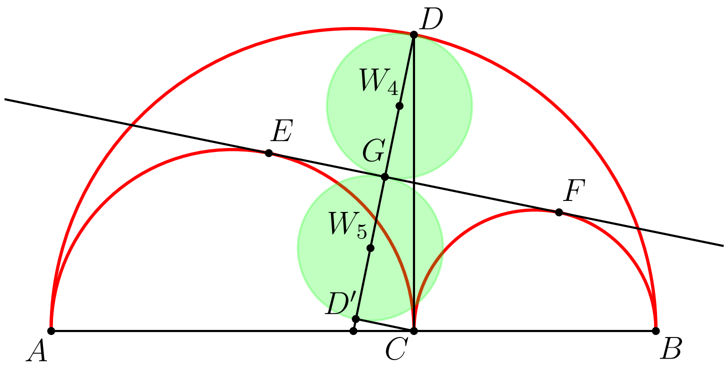
□

U privatnoj korespondenciji s Leonom Bankoffom, Clayton Dodge[4] je primijetio da će kružnica s promjerom $|D'G|$ također biti Arhimedova kružnica. Uz tu kružnicu Dodge je primijetio još nekoliko Arhimedovih kružnica sa zanimljivim svojstvima. Promotrimo sada familiju Dodgeovih kružnica.

[4]Clayton Dodge, američki matematičar, profesor na Sveučilištu u Maineu.

3.2 Dodgeove kružnice

Označimo sa (W_5) prethodno spomenutu kružnicu. Koristeći teorem 3.3 jednostavno ćemo pokazati da je kružnica (W_5) Arhimedova.



Slika 9.

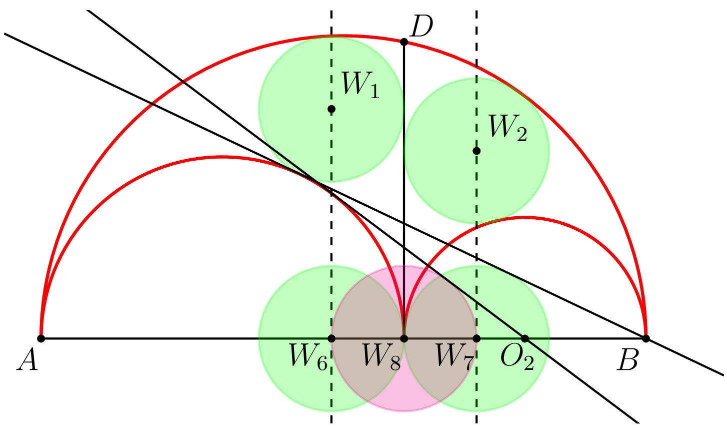
Teorem 3.4. *Radijus kružnice (W_5) jednak je $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.*

Dokaz. Iz teorema 3.3 znamo da je $|DG| = \frac{2r_1r_2}{r}$, a iz teorema 2.1 znamo da je $|DD^{'}| = \frac{2d_1d_2}{d_1+d_2}$. Sada je očito

$$|D^{'}G| = |DD^{'}| - |DG| = \frac{2d_1d_2}{d_1+d_2} - \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}.$$

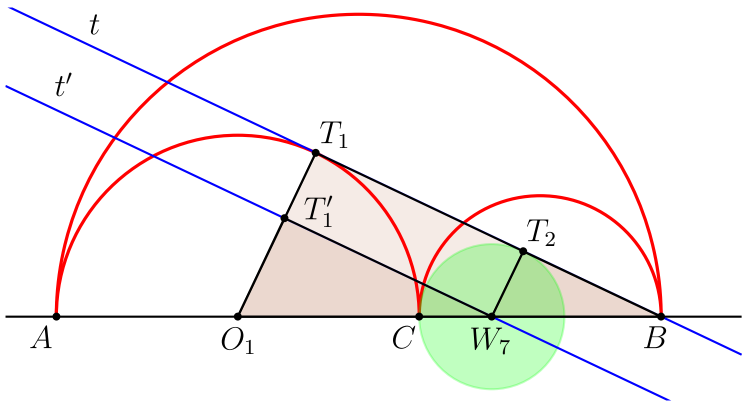
Kako je $|D^{'}G|$ promjer kružnice (W_5), slijedi da je njen radijus zaista jednak $p = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$. □

Konstruirajmo kružnice (W_6) i (W_7) translatiranjem središta kružnica (W_1) i (W_2) okomito na pravac AB te uvedimo i kružnicu (W_8) čije je središte na polovištu dužine W_6W_7. Dodge je komentirao u [3] kako te kružnice, kao obične translacije, ne bi bile posebno zanimljive da nije pronašao razlog zbog kojega bi ih se trebalo razmotriti. Naime, zajednička tangenta polukružnice α i kružnice (W_7) prolazi kroz točku B. Također, zajednička tangenta polukružnice α i kružnice (W_8) prolazi kroz središte polukružnice β. Dokažimo ova svojstva.



Slika 10a.

Teorem 3.5. *Zajednička tangenta t polukružnice α, odnosno β, i kružnice (W_7), odnosno (W_6), prolazi kroz točku B, odnosno A. Također, zajednička tangenta t polukružnice α, odnosno β, i kružnice (W_8) prolazi kroz središte polukružnice β, odnosno α.*



Slika 10b.

Dokaz. Neka je točka T_1 dodirna točka tangente t i polukružnice α te neka je točka T_2 dodirna točka tangente t i kružnice (W_7). Ako tangenti t povučemo paralelan pravac t' u točki W_7, dobit ćemo pravokutan trokut $O_1T_1'W_7$ gdje je T_1' presjecište dužine O_1T_1 i pravca t'. Sada je $|T_1'W_7| = |T_1T_2|$, a iz trokuta $O_1T_1'W_7$ pomoću Pitagorina poučka zaključujemo da je

$$|T_1T_2|^2 = |T_1'W_7|^2 = (r_1 + p)^2 - (r_1 - p)^2 = 4r_1p.$$

U pravokutnom trokutu W_7T_2B vrijedi

$$|T_2B|^2 = (2r_2 - p)^2 - p^2 = 4r_2^2 - 4r_2p,$$

a u pravokutnom trokutu O_1T_1B vrijedi

$$|T_1B|^2 = (2r_2 + r_1)^2 - r_1^2 = 4r_2^2 + 4r_1r_2.$$

Sada je dovoljno provjeriti da je

$$|T_1T_2| + |T_2B| = |T_1B|,$$

to jest

$$2\sqrt{r_1p} + 2\sqrt{r_2(r_2 - p)} = 2\sqrt{r_2(r_2 + r_1)}.$$

Uzmimo, jednostavnosti radi, $r_1 + r_2 = 1$. Sada je

$$\sqrt{r_1^2r_2} + \sqrt{r_2(r_2 - r_1r_2)} = \sqrt{r_2},$$

$$r_1\sqrt{r_2} + r_2\sqrt{r_2} = \sqrt{r_2},$$

$$r_1 + r_2 = 1$$

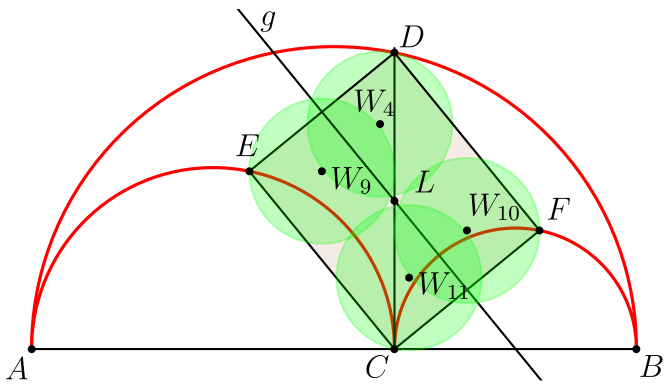
pa zaključujemo da jednakost vrijedi.

Kako smo pokazali da je $|T_1T_2| + |T_2B| = |T_1B|$, prema nejednakosti trokuta slijedi da su točke T_1, T_2 i B kolinearne.

Analogni postupak vrijedi za slučaj kružnice (W_6), a uz malu promjenu oznaka analogno se dokazuje i slučaj kružnice (W_8).

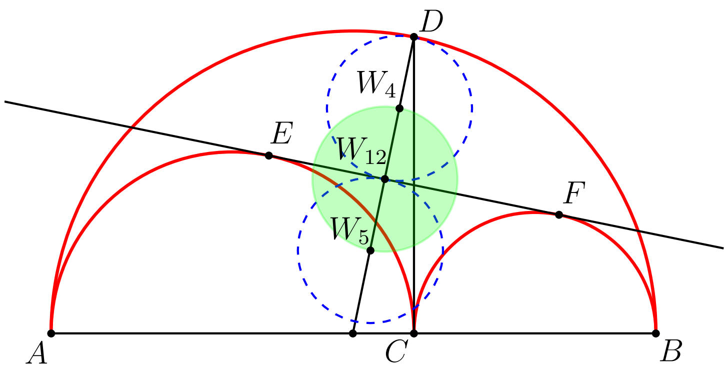
□

Označimo sada s E presjecište pravca AD i polukružnice α, s F presjecište pravca BD i polukružnice β i s L presjecište pravaca EF i CD. Već smo u propoziciji 2.4 pokazali da je četverokut $CFDE$ pravokutnik. Neka je sada g simetrala dužine ED. Ako kružnicu (W_4) zrcalimo s obzirom na simetralu g, slika će biti kružnica (W_9) koja prolazi točkom E. Ako kružnicu (W_9) zrcalimo s obzirom na točku L, slika će biti kružnica (W_{10}) koja prolazi točkom F. Napoljetku, ako kružnicu (W_4) zrcalimo s obzirom na točku L, slika će biti kružnica (W_{11}) koja prolazi točkom C.



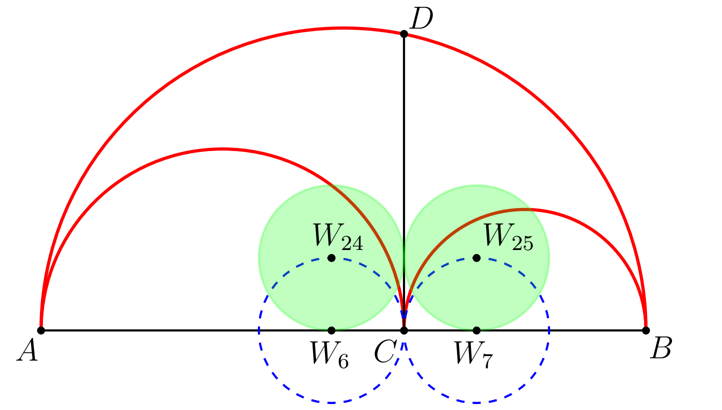
Slika 11.

Nakon što je Dodge održao predavanje o prvih jedanaest Arhimedovih kružnica, Jonathan Dearing, tada student, ukazao je na kružnicu (W_{12}) čiji je promjer na pravcu $D^{'}D$ i jednak je udaljenosti između središta kružnica (W_4) i (W_5) [3]. Očito je da je promjer kružnice (W_{12}) jednak dvostrukom radijusu Arhimedovih kružnica pa je tako i (W_{12}) još jedan član familije Arhimedovih kružnica.



Slika 12.

Sastavljajući dokaze za tvrdnje iznesene u [3], Dodge je primijetio još dvije Arhimedove kružnice (W_{24}) i (W_{25}). Te kružnice su translacije kružnica (W_6) i (W_7), to jest, središta im se nalaze na kružnicama (W_6) i (W_7) i diraju pravac AB.



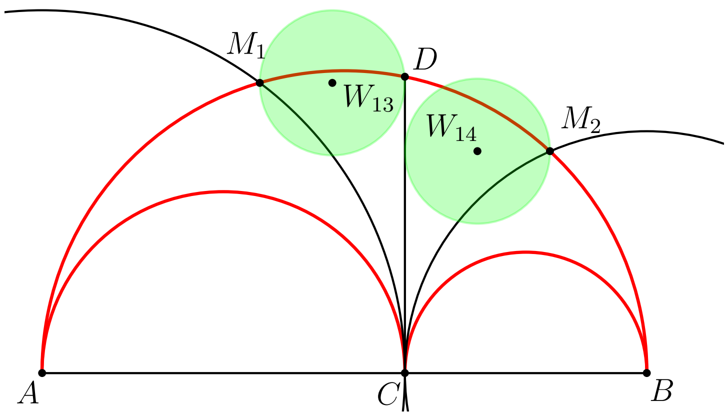
Slika 13.

3.3 Schochove kružnice

Martin Gardner[5] je 1979. godine napisao članak o Bankoffovoj trećoj kružnici koji je inspirirao Thomasa Schocha, tada studenta u Njemačkoj, da pokuša pronaći još nekoliko Arhimedovih kružnica. Neke od Schochovih kružnica bit će opisane u slijedećim teoremima.

Promotrimo slijedeći teorem.

Teorem 3.6. *Neka je točka M_1, odnosno M_2, presjecište kružnice $A(C)$, odnosno $B(C)$, i polukružnice γ. Tada kružnica (W_{13}), odnosno (W_{14}), koja prolazi točkom M_1, odnosno M_2, i dira pravac CD ima radijus $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.*



Slika 14.

[5]Martin Gardner (1914.), popularni američki pisac matematičkih i znanstvenih tema.

Dokaz. Uzmimo, jednostavnosti radi, da je $d = d_1 + d_2 = 1$, tj. da je $p = 2r_1r_2$. Smjestimo točku A u ishodište koordinatnog sustava. Tada je jednadžba kružnice $A(C)$ dana s:

$$x^2 + y^2 = d_1^2,$$

a jednadžba polukružnice γ je dana sa

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad y \geq 0.$$

Iz ovih dviju jednadžbi možemo odrediti apscisu presjecišta polukružnice γ i kružnice $A(C)$, tj. apscisu točke M_1. Slijedi da je apscisa točke M_1 jednaka $x = d_1^2$. Sada je udaljenost između točke $(d_1^2, 0)$, tj. točke $M_1 = (d_1^2, y_0)$ i pravca CD, tj. pravca $x = d_1$ jednaka

$$d_1 - d_1^2 = d_1(1 - d_1) = d_1d_2 = 4r_1r_2.$$

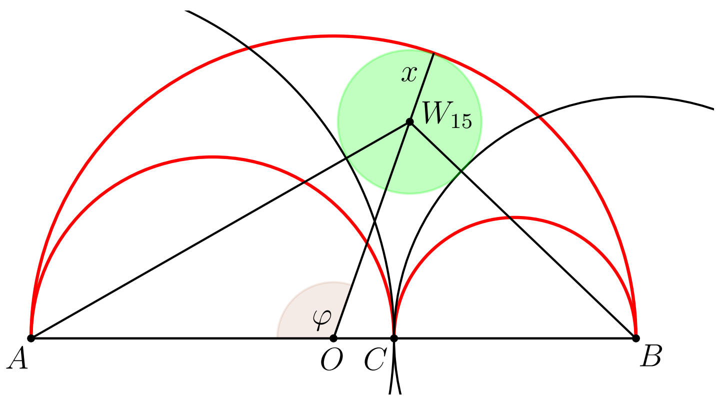
Očigledno je $4r_1r_2$ dvostruko veća duljina od duljine radijusa kružnice (W_{13}), pa je polovište te duljine jednako $2r_1r_2 = p$.

Analognim postupkom dokazuje se da je kružnica (W_{14}) Arhimedova.

□

Translatiranjem središta kružnica (W_{13}) i (W_{14}) na os apscisa ponovo se dobivaju prije spomenute Dodgeove kružnice (W_6) i (W_7).

Slijedeća kružnica, za koju je Schoch pokazao da je Arhimedova, je kružnica koja iznutra dira polukružnicu γ, a kružnice $A(C)$ i $B(C)$ dira izvana. Nazovimo tu kružnicu (W_{15}).



Slika 15.

Teorem 3.7. *Radijus kružnice (W_{15}) jednak je $p = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1r_2}{r}$.*

Dokaz. Promotrimo trokute AOW_{15} i BOW_{15}. Označimo sa φ kut $\angle AOW_{15}$. Tada je kut $\angle BOW_{15}$ jednak $180 - \varphi$. Prema poučku o kosinusu kuta vrijedi

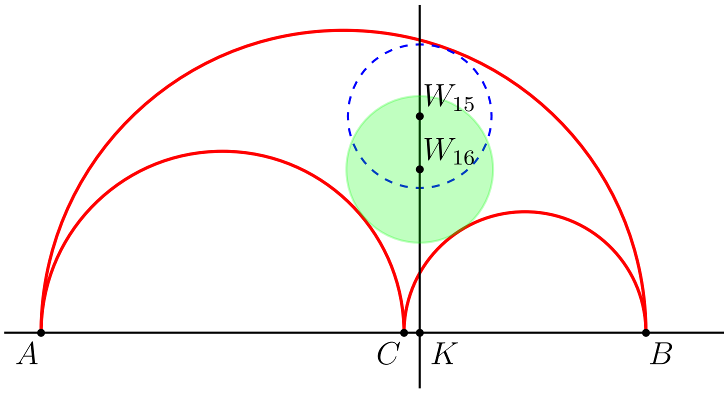
$$(2r_1 + x)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2 - x)^2 - 2(r_1 + r_2)(r_1 + r_2 - x)\cos\varphi,$$

$$(2r_2 + x)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2 - x)^2 + 2(r_1 + r_2)(r_1 + r_2 - x)\cos\varphi.$$

Nakon zbrajanja ovih dviju jednakosti, slijedi da je $x = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

Kružnica (W_{15}) je zapravo upisana kružnica *zakrivljenog* trokuta CM_1M_2. □

Spustimo sada iz točke W_{15} okomicu na pravac AB i presjecište te okomice sa pravcem AB neka je točka K. Tada je kružnica (W_{16}), čije se središte nalazi na pravcu KW_{15} i koja izvana dira polukružnica α i β, Arhimedova.



Slika 16.

Prije nego što dokažemo ovu tvrdnju, pronađimo prvo položaj pravca KW_{15} u koordinatnom sustavu sa ishodištem u točki C.

Pri razmatranju Arhimedovih kružnica, Peter Woo je opazio neka svojstva koja se tiču pravca KW_{15} (koja će biti obrađena u poglavlju 3.4) a taj je pravac nazvao *Schochovim pravcem.*

Definicija 3.1. *Schochov pravac je pravac koji je u središtu kružnice* (W_{15}) *okomit na pravac* AB.

Odredimo jednadžbu Schochovog pravca u koordinatnom sustavu s ishodištem u točki C.

Teorem 3.8. *Jednadžba Schochovog pravca u koordinatnom sustavu s ishodištem u točki* C *dana je dana s*

$$x = \frac{r_1 r_2 (r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Dokaz. Označimo koordinate točke W_{15} sa $W_{15} = (x_0, y_0)$. Kružnica (W_{15}) je Arhimedova pa je njen radijus jednak p. Neka je točka K presjecište Schochovog pravca i pravca AB, a neka je x udaljenost od točke C do točke K, tj. $K = (x, 0)$. Sada iz trokuta AKW_{15} i BKW_{15} slijedi

$$y_0^2 = (2r_1 + p)^2 - (2r_1 + x)^2,$$

$$y_0^2 = (2r_2 + p)^2 - (2r_2 - x)^2.$$

Iz gornjih dviju jednakosti slijedi da je

$$p = x\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}.$$

Radijus kružnice (W_{15}) je p, tj. $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$. Ako uvrstimo p u gornju jednakost, slijedi da je $x = \frac{r_1 r_2 (r_1 - r_2)}{(r_1+r_2)^2}$.

□

Korištenje ovog rezultata i Pitagorinog poučka, jednostavno se pokazuje da je kružnica (W_{16}) Arhimedova.

Teorem 3.9. *Radijus kružnice (W_{16}) jednak je $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.*

Dokaz. Neka je $|KW_{16}| = y$, $|CK| = x$ i neka je radijus kružnice (W_{16}) jednak q. Iz pravokutnih trokuta O_1KW_{16} i O_1KW_{16} slijedi

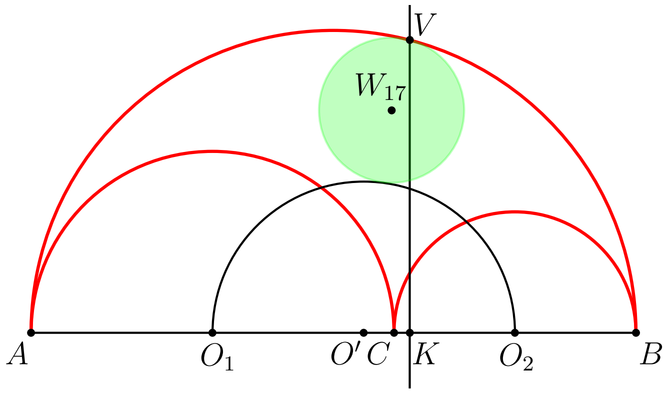
$$y^2 = (r_1 + q)^2 - (r_1 + x)^2,$$

$$y^2 = (r_2 + q)^2 - (r_2 - x)^2.$$

Izjednačavanjem ovih dviju jednakosti slijedi da je $q = \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}x$, gdje je $x = |CK|$, tj. udaljenost Schochovog pravca od točke C, tj. $x = \frac{r_1 r_2 (r_1-r_2)}{(r_1+r_2)^2}$. Sada je očito da je $q = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = p$.

□

Označimo s V presjecište Schochovog pravca i polukružnice γ. Neka je točka O' polovište dužine O_1O_2. Ako konstruiramo polukružnicu (O') čije je središte točka O', a radijus jednak $\frac{1}{2}|O_1O_2|$, onda će kružnica (W_{17}), koja prolazi točkom V i izvana dira polukružnicu (O'), biti Arhimedova.



Slika 17.

Teorem 3.10. *Radijus kružnice (W_{17}) jednak je $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.*

Dokaz. Postavimo ponovo točku C kao ishodište koordinatnog sustava i označimo s q radijus kružnice (W_{17}), a sa O' polovište dužine O_1O_2. Koordinate točke O' su $(\frac{r_2-r_1}{2}, 0)$.

Promotrimo li pravokutan trokut $O'KV$, s pravim kutom u točki K, uočiti ćemo da vrijedi

$$|O'V|^=|KV|^2 + |KO'|^2 \tag{3.1}$$

gdje je $|O'V| = \frac{r_1+r_2}{2} + 2q$, $|KO'| = \frac{r_1r_2(r_1-r_2)}{(r_1+r_2)^2} - \frac{r_2-r_1}{2}$. Duljina dužine $|KV|$ biti će jednaka ordinati točke V. Točka V je presjecište polukružnice γ i Schochovog pravca pa vrijedi

$$(x-(r_2-r_1))^2 + y^2 = (r_1+r_2)^2,$$

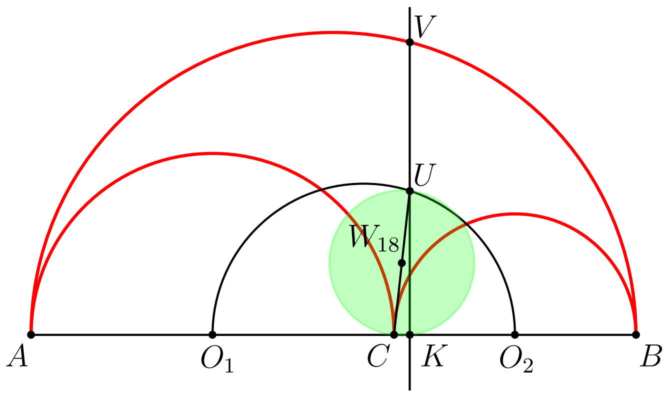
$$x = \frac{r_1r_2(r_1-r_2)}{(r_1+r_2)^2},$$

iz čega slijedi da je

$$|KV|^2 = y^2 = (r_1+r_2)^2 - \left(\frac{r_1r_2(r_1-r_2)}{(r_1+r_2)^2} - (r_2-r_1)\right)^2.$$

Uvrštavanjem $|O'V|$, $|KV|$ i $|KO'|$ u (3.1) dobivamo da je $q = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = p$. □

Neka je točka U presjecište polukružnice (O') i Schochovog pravca. Kružnica (W_{18}) određena točkama U, K i C je Arhimedova.



Slika 18.

Teorem 3.11. *Radijus kružnice (W_{18}) jednak je $p = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1r_2}{r}$.*

Dokaz. Slično kao i u teoremu 3.10 radijus kružnice (W_{18}) označimo sa q i promotrimo pravokutni trokut CKU s pravim kutom u točki K. Očito je da je dužina UC promjer kružnice (W_{18}) pa iz Pitagorinog poučka vrijedi

$$4q^2 = |UK|^2 + |CK|^2 \tag{3.2}$$

gdje je $|CK| = \frac{r_1r_2(r_1-r_2)}{(r_1+r_2)^2}$, a duljina dužine UK jednaka ordinati točke U.

Točka U je presjecište polukružnice (O') i Schochovog pravca pa vrijedi

$$(x - \frac{r_2-r_1}{2})^2 + y^2 = \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2$$

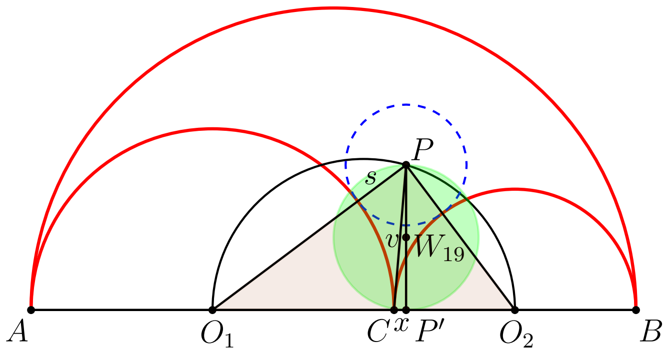
$$x = \frac{r_1 r_2 (r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2},$$

$$|UK|^2 = y^2 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1 r_2 (r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2} - \frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2.$$

Uvrštavanjem svih vrijednosti u (3.2) dobivamo da je $q = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = p$.

□

Neka je P točka na polukružnici (O') takva da kružnica sa središtem u toj točki dira polukružnice α i β. Tada je kružnica, koja dira pravac AB i prolazi točkom P, Arhimedova.



Slika 19.

Teorem 3.12. *Radijus kružnice* (W_{19}) *jednak je* $p = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.

Dokaz. Neka je točka P' nožište okomice iz točke P na pravac AB. Promotrimo trokute O_1CP, $CP'P$ i O_2PC. Označimo dužinu CP' s x, dužinu CP s v, a radijus kružnice (P) sa s. Iz poučka o kosinusu kuta u trokutu O_1CP, odnosno O_2PC slijedi

$$(r_1 + s)^2 = r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 - 2r_1 \frac{r_2 - r_1}{2} \cos(\angle O_1CP),$$

$$(r_2 + s)^2 = r_2^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 + 2r_2 \frac{r_2 - r_1}{2} \cos(\angle O_1CP).$$

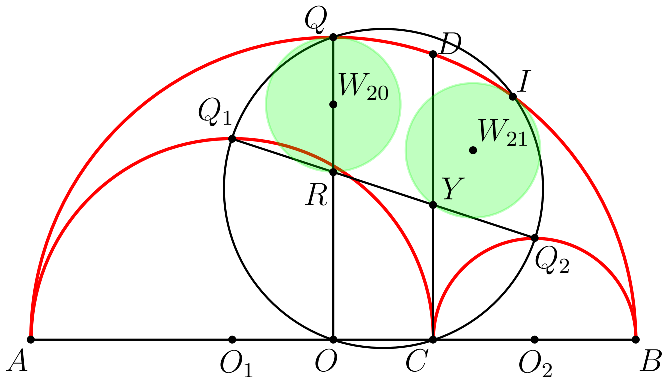
Trokut $CP'P$ je pravokutan, s pravim kutom u točki P', pa je

$$x^2 = \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 - v^2.$$

Rješavanjem ovih jednadžbi po v dobivamo $v = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, odnosno $v = 2p$ što je promjer Arhimedove kružnice.

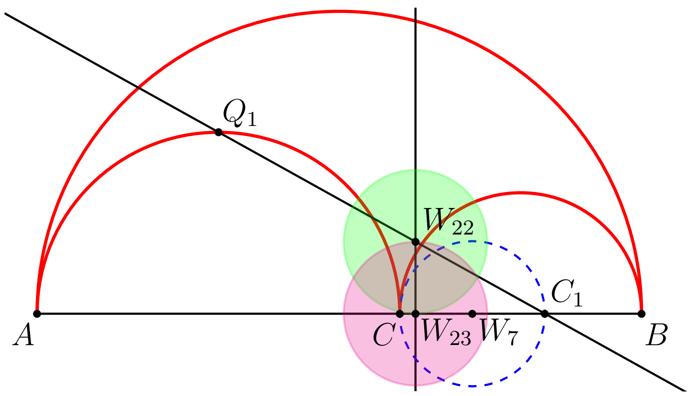
□

Spomenimo, bez dokaza, još neke Schochove kružnice. Neka su Q_1, Q_2 i Q presjecišta simetrala dužina AC, CB, AB i polukružnica α, β, γ. Označimo s (Q') kružnicu promjera $|Q_1Q_2|$. Ta kružnica sadrži točke Q, Q_1, O i C. Označimo s I drugo presjecište kružnice (Q') i polukružnice γ te s R, odnosno Y, presjek dužine Q_1Q_2 i dužine OQ, odnosno CD. Kružnica promjera $|QR|$ je kružnica (W_{20}), a kružnica promjera $|IY|$ je kružnica (W_{21}).



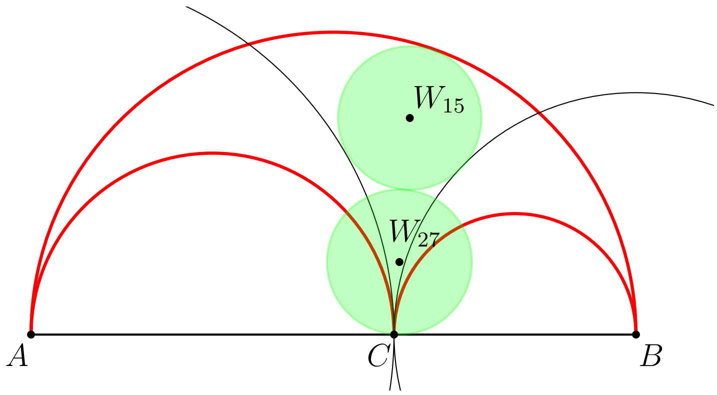
Slika 20.

Označimo sa C_1 presjek kružnice (W_7) i pravca AB (drugo presjecište je točka C). Neka je točka W_{22} presjek dužine Q_1C_1 i Schochovog pravca. Kružnica (W_{22}) je kružnica sa središtem u točki W_{22} koja kao tangentu ima pravac AB. Kružnica (W_{23}) je kružnica čije je središte presjek Schochovog pravca i pravca AB i koja prolazi točkom W_{22}.



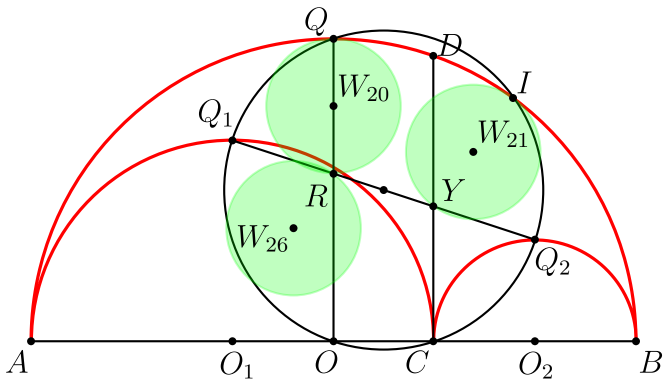
Slika 21.

Spomenimo još i kružnicu (W_{27}) koja izvana dira kružnicu (W_{15}) i prolazi točkom C.



Slika 22.

Proučavajući Schochov rad, Dodge je otkrio još jednu Arhimedovu kružnicu, kružnicu (W_{26}), koja je simetrična kružnici (W_{21}) s obzirom na polovište dužine Q_1Q_2 i prolazi točkom R.



Slika 23.

3.4 Wooove kružnice

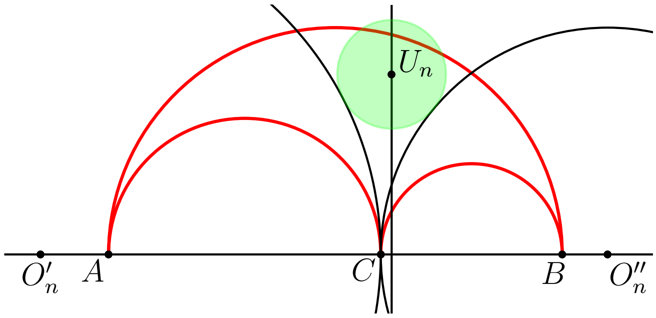
U ovom će poglavlju biti opisana beskonačna familija Arhimedovih kružnica koju je otkrio Peter Woo[6]. Prisjetimo se Schochove kružnice (W_{15}) iz teorema 3.7. Ta kružnica je iznutra dirala polukružnicu γ, a kružnice $A(C)$ i $B(C)$, čiji su radijusi dvostruko veći od radijusa polukružnica α i β, dirala je izvana. Woo je promatrao što se događa ako se radijusi kružnica $A(C)$ i $B(C)$ povećaju n puta, za pozitivan broj n, tako da i dalje prolaze kroz točku C, a središte im ostaje na pravcu AB. Woo je s "iznenađenjem primijetio" [3] da će središta Arhimedovih kružnica, koje diraju n puta "povećane" kružnice $A(C)$ i $B(C)$, biti na Schochovom pravcu.

Wooova će opažanja detaljnije biti navedena u Wooovom teoremu, no prije toga, uvedimo oznake.

Pravac CD će ponovo biti pravac koji je u točki C okomit na pravac AB. Nadalje, neka su (O_n') i (O_n'') polukružnice takve da im je pravac CD

[6] Peter Woo, američki matematičar, profesor na Sveučilištu Biola.

zajednička tangenta, a središta im se nalaze na pravcu AB, tj. središte $O_n^{'}$ polukružnice $(O_n^{'})$ nalazi se na polupravcu CA, a središte $O_n^{''}$ polukružnice $(O_n^{''})$ na polupravcu CB. Neka je radijus kružnice $(O_n^{'})$ n puta veći od radijusa polukružnice α, a radijus kružnice $(O_n^{''})$ neka je n puta veći od radijusa polukružnice β.



Slika 24.

Teorem 3.13 (Wooov teorem)**.** *Neka je n bilo koji pozitivni realni broj. Tada se središte kružnice (U_n), čiji je radijus jednak radijusu Arhimedovih kružnica i koja izvana dira polukružnice $(O_n^{'})$ i $(O_n^{''})$, nalazi na Schochovom pravcu.*

Obratno, bilo koja kružnica (U_n),čije se središte nalazi na Schochovom pravcu iznad visine $2r_1r_2\frac{\sqrt{r_1r_2}}{(r_1+r_2)^2}$ i čiji je radijus jednak radijusu Arhimedovih kružnica, izvana će dirati polukružnice $(O_n^{'})$ i $(O_n^{''})$, za neki ne-negativni realni broj n.

Dokaz. Jednostavnosti radi, neka je $r_1 + r_2 = 1$.

Smjestimo arbelos u koordinatni sustav tako da je točka C ishodište koordinatnog sustava, pravac AB je os apscisa, a pravac CD je os ordinata. Označimo koordinate središta kružnice (U_n) sa $U_n = (x, y)$. Radijus od (U_n) jednak je r_1r_2. Sada vrijedi

$$|O_n^{'}U_n| = nr_1 + r_1r_2,$$

$$|O_n^{''}U_n| = nr_2 + r_1r_2,$$

$$|O_n^{'}U_n|^2 - |O_n^{''}U_n|^2 = (nr_1 + r_1r_2)^2 - (nr_2 + r_1r_2)^2.$$

Iz pravokutnog trokuta $O_n^{'}KU_n$, gdje je točka K presjecište Schochovog pravca i pravca AB slijedi

$$|O_n^{'}U_n|^2 = y^2 + (nr_1 + x)^2.$$

Slično, iz pravokutnog trokuta $O_n^{''}KU_n$ slijedi

$$|O_n^{''}U_n|^2 = y^2 + (nr_2 - x)^2.$$

Sada vrijedi

$$|O_n^{'}U_n|^2-|O_n^{''}U_n|^2 = (nr_1+r_1r_2)^2-(nr_2+r_1r_2)^2 = y^2+(nr_1+x)^2-(y^2+(nr_2-x)^2),$$

$$(nr_1 + r_1r_2)^2 - (nr_2 + r_1r_2)^2 = (nr_1 + x)^2 - (nr_2 - x)^2,$$
$$2nr_1r_2(r_1 - r_2) = 2n(r_1 + r_2)x.$$

Sada je $x = r_1r_2(r_1 - r_2)$, što je jednadžba Schochovog pravca za $r_1 + r_2 = 1$.

Obratno, promotrimo kružnicu $(W_{11}) \equiv (U_0)$. Ona ima središte u točki W_{11}, prolazi točkom C i pravac AB dira u točki K pa u pravokutnom trokutu CKW_{11} vrijedi

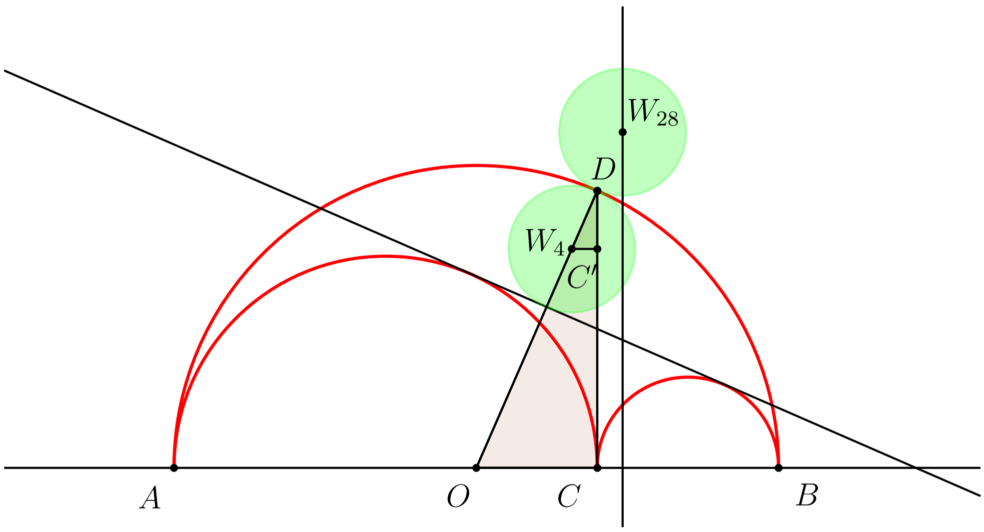
$$|KW_{11}|^2 = \left(\frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}\right)^2 - \left(\frac{r_1r_2(r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2}\right)^2,$$

$$|KW_{11}| = \frac{2r_1r_2\sqrt{r_1r_2}}{(r_1 + r_2)^2},$$

te je obrat teorema zadovoljen.

□

Paul Yiu[7] je kao posebnu Wooovu kružnicu istaknuo kružnicu (W_{28}) koja izvana dira polukružnicu γ u točki D, koja je dodirna točka kružnice (W_4) i polukružnice γ. Ta kružnica je zrcalno simetrična slika kružnice (W_4) s obzirom na točku D. Dokaz ove tvrdnje slijedi iz sličnosti pravokutnih trokuta OCD i $W_4C'D$ gdje je točka C' presjecište pravca CD i okomice iz točke W_4 na pravac CD.



Slika 25.

Vrijedi

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|W_4D|}{|W_4C'|} \Rightarrow |W_4C'| = \frac{|W_4D|}{|OD|} \cdot |OC|,$$

$$|W_4C'| = \frac{p}{r}(r_1 - r_2) = \frac{r_1r_2(r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2}.$$

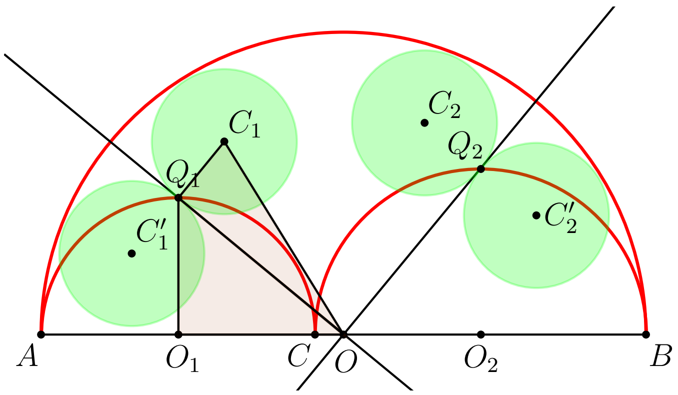
[7]Paul Yiu, američki matematičar, profesor na Sveučilištu u Floridi.

Udaljenost točke W_4 do pravca CD jednaka je udaljenosti Schochovog pravca do pravca CD pa će zrcalno simetrična slika točke W_4, s obzirom na točku D, biti točka na Schochovom pravcu koja je od točke D udaljena za $|W_4D| = p$.

3.5 Powerove kružnice

U ovom poglavlju će biti obrađene četiri Arhimedove kružnice, što ih je otkrio Frank Power.

Teorem 3.14. *Neka su O_1, O_2 i O središta polukružnica α, β i γ. Neka je Q_1 presjecište okomice iz točke O_1 na pravac AB i polukružnice α, a neka je Q_2 presjecište okomice iz točke O_2 na pravac AB i polukružnice β. Tada kružnica (C_1), koja iznutra dira polukružnicu γ i koja je tangentna pravcu OQ_1, ima radijus $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$. Također, kružnica (C_2), koja iznutra dira polukružnicu γ i koja je tangentna pravcu OQ_2, ima radijus p.*



Slika 26.

Dokaz. Postoje dvije kružnice koje iznutra diraju polukružnicu γ i koje su tangente pravcu OQ_1. Označimo s q radijus tih kružnica. Možemo primijetiti da vrijedi

$$|OQ_1|^2 = |O_1Q_1|^2 + |OO_1|^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

$$((r_1 + r_2) - q)^2 = (r_1^2 + r_2^2) + q^2,$$

iz čega slijedi $q = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = p$. Analognim postupkom dokazuje se da je radijus dviju kružnica, koje iznutra diraju polukružnicu γ i koje diraju pravac OQ_2, jednak $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.

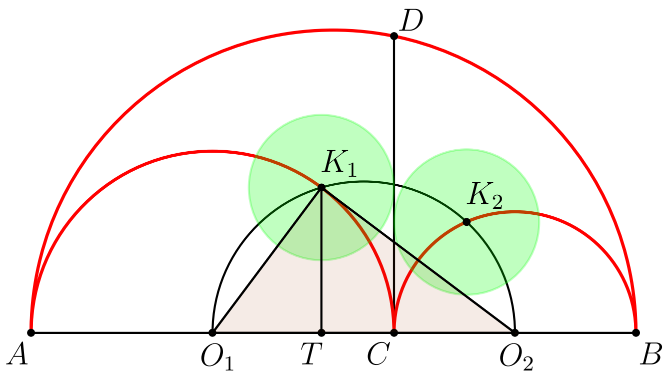
□

3.6 Lamoenove kružnice

U ovom poglavlju će biti opisane neke Arhimedove kružnice koje je otkrio Floor van Lamoen[8]. Lamoenove kružnice koje će se obraditi povezane su sa polukružnicom (O'), čije se središte nalazi na polovištu dužine O_1O_2.

[8]Floor van Lamoen (1966.), nizozemski matematičar.

Promotrimo presjecište polukružnice O' s polukružnicom α, odnosno β, i označimo ta presjecišta s K_1, odnosno K_2. Tada je kružnica, sa središtem u točki K_1, odnosno K_2, koja dira pravac CD, Arhimedova.



Slika 27.

Teorem 3.15. *Radijus kružnica* (K_1) *i* (K_2) *jednak je* $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.

Dokaz. Neka je točka T nožište okomice iz točke K_1 na pravac AB. Sada iz pravokutnog trokuta $O_2K_1O_1$ slijedi

$$|O_1T| = \frac{r_1^2}{r_1 + r_2}.$$

Označimo sa x radijus kružnice (K_1). Vrijedi

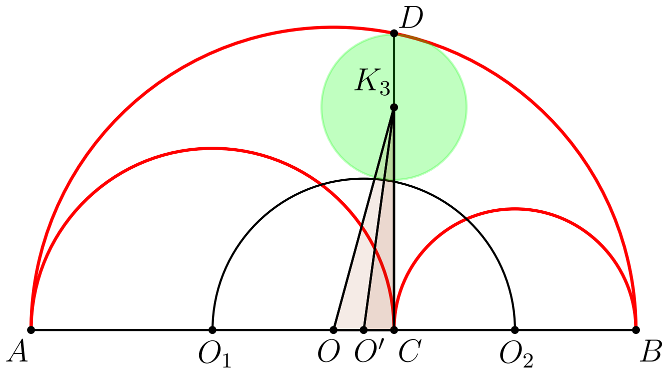
$$x = |TC| = |O_1C| - |O_1T| = r_1 - \frac{r_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = p.$$

Analogni postupak vrijedi za kružnicu K_2.

$\square$

Lamoen je dodao da tangenta kružnice $A(C)$ u točki presjecišta kružnice (W_{13}) i polukružnica $A(C)$ i γ dira i kružnicu (K_1). Također, tangenta kružnice $B(C)$ u točki presjecišta kružnice (W_{14}) i polukružnica $B(C)$ i γ dira kružnicu (K_2).

Kada je Paul Yiu razmatrao Lamoenove radove, zaključio je da je kružnica (K_3), čije središte se nalazi na pravcu CD i koja dira polukružnicu γ, Arhimedova. Primjetimo da kružnica (K_3) dira polukružnicu γ u točki različitoj od D kada je $r_1 \neq r_2$.



Slika 28.

Teorem 3.16. *Radijus kružnice* (K_3) *jednak je* $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.

Dokaz. Neka je x radijus kružnice (K_3). Promotrimo pravokutne trokute OCK_3 i $O'CK_3$. Vrijedi

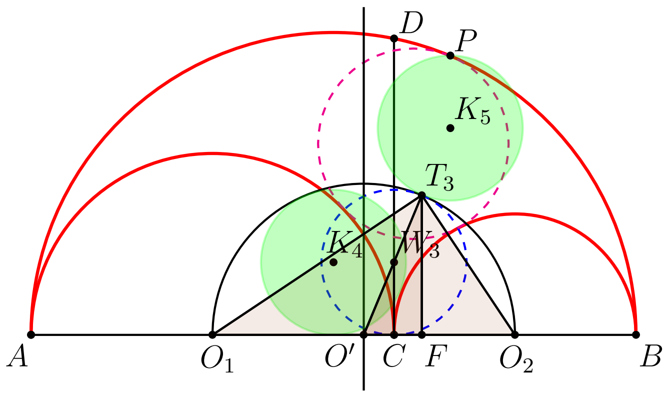
$$|OK_3|^2 - |OC|^2 = |O'K_3|^2 - |O'C|^2,$$

$$(r-x)^2 - (r_1 - r_2)^2 = (\frac{r}{2} + x)^2 - (\frac{r_1 - r_2}{2})^2,$$

iz čega slijedi da je $x = \frac{r_1 r_2}{r}$.

□

Lamoen je opazio da Arhimedova kružnica (W_3) iznutra dira polukružnicu (O'), stoga je zaključio da postoji još jedna Arhimedova kružnica, (K_4), koja dira polukružnicu (O') i pravac AB. Uz kružnicu (K_4), Lamoen je primijetio kružnicu (K_5), koja dira polukružnicu (O') i kružnicu (W_3) u točki T_3, te prolazi kroz točku P, koja je dodirna točka upisane kružnice arbelosa i polukružnice γ.



Slika 29.

Teorem 3.17. *i) Kružnica* (W_3) *iznutra dira polukružnicu* (O'),

ii) radijus kružnica (K_4) *i* (K_5) *jednak je* $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$. *Štoviše, kružnica* (K_5) *prolazi dodirnom točkom* P *upisane kružnice arbelosa i polukružnice* γ.

Dokaz. i) Neka je T_3 točka na polukružnici (O'). Tada je $|O'T_3| = \frac{r}{2}$. Sada iz pravokutnog trokuta $CO'W_3$ slijedi

$$|O'W_3| = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r}.$$

Prema tome je

$$|W_3T_3| = \frac{r}{2} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r} = \frac{r_1 r_2}{r}$$

pa je T_3 dodirna točka polukružnice (O') i kružnice (W_3).

ii) Kružnica (K_4) je zrcalno simetrična slika kružnice (W_3) s obzirom na simetralu dužine O_1O_2 pa im je i radijus jednak.

Označimo s F_3 nožište okomice iz točke T_3 na pravac AB. Iz sličnosti trokuta $O'F_3T_3$ i $O'CW_3$ vrijedi

$$\frac{|O'F_3|}{|OT_3|} = \frac{|O'C|}{|O'W_3|}$$

pa je

$$|O'F_3| = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r}{2} - p} \cdot |O'C| = \frac{(r_2 - r_1)r^2}{2(r_1^2 + r_2^2)},$$

iz čega slijedi da je

$$|O_1F_3| : |F_3O_2| = r_1^2 : r_2^2,$$

pa je

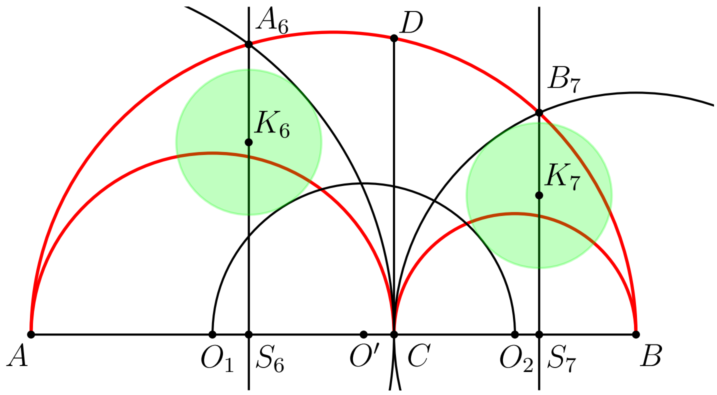
$$|O_1T_3| : |T_3O_2| = r_1 : r_2,$$

što znači da simetrala kuta $\angle O_1T_3O_2$ prolazi točkom C.

Analogno tome, simetrala kuta $\angle APB$ prolazi točkom C, iz čega slijedi da su točke C, T_3 i P kolinearne. Sada je kružnica (K_5) zrcalno simetrična slika kružnice (W_3) s obzirom na točku T_3 pa im je i radijus jednak te prolazi točkom P koja je slika točke C.

□

Označimo presjecište kružnice $A(C)$, odnosno $B(C)$, i polukružnice γ s A_6, odnosno B_6. Kružnica (K_6), čije se središte nalazi na okomici pravca AB iz točke A_6 i koja dira polukružnicu (O') i kružnicu $A(C)$, je Arhimedova. Očito je da možemo identičnu tvrdnju uspostaviti i za kružnicu (K_7), čije središte se nalazi na okomici pravca AB iz točke B_7 i koja dira kružnicu $B(C)$ i polukružnicu (O').



Slika 30.

Teorem 3.18. *Radijus kružnica* (K_6) *i* (K_7) *jednak je* $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.

Dokaz. Postavimo točku C kao ishodište koordinatnog sustava i označimo sa S_6 presjecište pravca AB i okomicu pravca AB iz točke A_6. Točka S_6 je ortogonalna projekcija točke A_6 na pravac AB pa je njena apscisa ista kao apscisa točke A_6, tj. kao apscisa presjeka kružnice $A(C)$ i polukružnice γ. Iz

$$(x + 2r_1)^2 + y^2 = 4r_1^2,$$

$$(x - (r_2 - r_1))^2 + y^2 = r^2$$

slijedi da je $x = -2\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = -2p$. Dakle, duljina dužine $O'S_6$ jednaka je $2p + \frac{r_2-r_1}{2}$, a duljina dužine AS_6 jednaka je $2(r_1 - p)$. Ako s x označimo radijus kružnice (K_6), onda iz pravokutnih trokuta AS_6K_6 i $O'S_6K_6$ slijedi

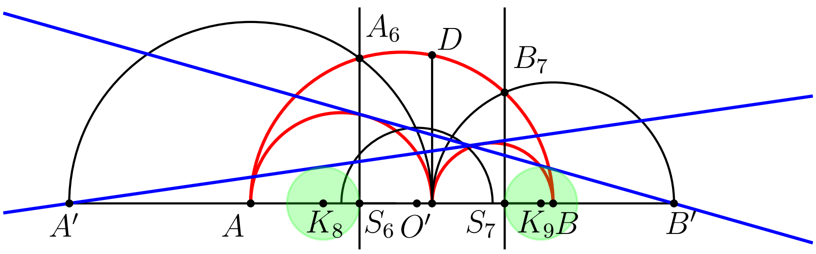
$$\left(\frac{r_1 + r_2}{2} + x\right)^2 - \left(2p + \frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 = (2r_1 - x)^2 - 4(r_1 - p)^2$$

pa je $x = p$.

Analognim postupkom se dokazuje da je radijus kružnice (K_7) također jednak p.

□

Označimo s A', odnosno B', presjecište kružnice $A(C)$, odnosno $B(C)$, i pravca AB različito od točke C. Kružnica (K_8), koja dira tangentu polukružnice β iz točke A' i pravac A_6S_6 iz prethodnog teorema, je Arhimedova. Analogno tome, kružnica (K_9), koja dira tangentu polukružnice α iz točke B' i pravac B_7S_7, je Arhimedova.



Slika 31.

Teorem 3.19. *Radijus kružnica* (K_8) *i* (K_9) *jednak je* $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.

Dokaz. Označimo s x radijus kružnice (K_8), s K_8' točku dodira kružnice (K_8) i tangente polukružnice β iz točke A' te s O_2' točku dodira polukružnice β i tangente polukružnice β iz točke A'. Iz pravokutnih trokuta $A'K_8K_8'$ i $A'O_2O_2'$ vrijedi

$$\frac{|A'K_8|}{|K_8K_8'|} = \frac{|A'O_2|}{|O_2O_2'|},$$

$$\frac{4r_1 + r_2}{r_2} = \frac{4r_1 - 2p - x}{x},$$

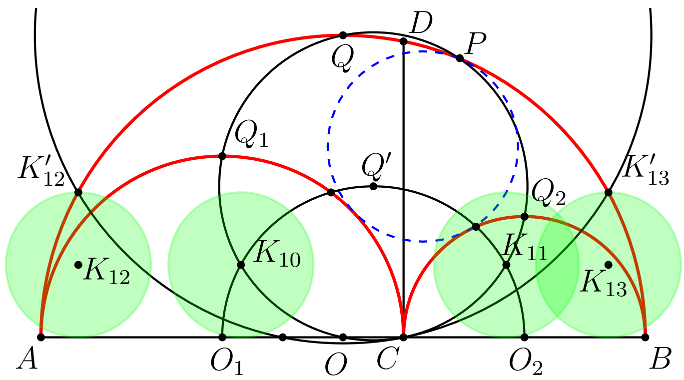
iz čega slijedi $x = p$.

Analogni postupak vrijedi za kružnicu (K_9). □

Lamoen je dodao još četiri Arhimedove kružnice koje se vežu uz kružnicu (Q'), tj. kružnicu koja sadrži točke O, C, Q, P, Q_1 i Q_2, gdje je točka Q presjecište polukružnice γ i okomice na pravac AB iz točke O, točka P dodirna točka polukružnice γ i arbelosu upisane kružnice, točka Q_1 presjecište polukružnice α i okomice na pravac AB iz točke O_1, točka Q_2 presjecište polukružnice β i okomice na pravac AB iz točke O_2.

Kružnica (Q') siječe polukružnicu (O') u točkama K_{10} i K_{11} pa su kružnice, čija su središta u tim točkama, i koje diraju pravac AB, Arhimedove.

Promotrimo i kružnicu $Q(C)$. Ona siječe polukružnicu γ u dvije točke, K_{12}' i K_{13}'. Udaljenost tih točaka od pravca AB jednaka je $\frac{2r_1r_2}{r} = 2p$ pa ako s K_{12}, odnosno K_{13}, označimo polovište udaljenosti između točke K_{12}', odnosno K_{13}', do pravca AB, tada će kružnica (K_{12}), odnosno (K_{13}), biti Arhimedova i dirat će pravac AB.



Slika 32.

Teorem 3.20. *Radijus kružnica* (K_{10}), (K_{11}), (K_{12}) *i* (K_{13}) *jednak je* $p = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1 r_2}{r}$.

Dokaz. Iz teorema 2.1 znamo da je radijus kružnice (Q') jednak $\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}$. Kako je točka K_{10} presjecište kružnica (Q') i (O'), njenu ordinatu možemo dobiti kao ordinatu zajedničkog rješenja jednadžbi kružnica (Q') i (O'), tj.

$$(x - \frac{r_2 - r_1}{2})^2 + y^2 = \frac{r^2}{4},$$

$$(x - \frac{r_2 - r_1}{2})^2 + (y - \frac{r}{2})^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2},$$

iz čega slijedi $y = \frac{r_1 r_2}{r} = p$.

Također, točka K'_{12} je presjecište kružnice $Q(C)$ i polukružnice γ, pa njenu ordinatu možemo dobiti kao ordinatu zajedničkog rješenja jednadžbi

$$(x - (r_2 - r_1))^2 + y^2 = r^2,$$

$$(x - (r_2 - r_1))^2 + (y - r)^2 = r^2 + (r_2 - r_1)^2,$$

iz čega slijedi $y = \frac{2r_1 r_2}{r} = 2p$.

Kako je točka K_{12} polovište udaljenosti točke K'_{12} do pravca AB, njena je ordinata jednaka $\frac{r_1 r_2}{r} = p$, to jest kružnica (K_{12}) je Arhimedova.

Analogni postupak vrijedi i za kružnice (K_{11}) i (K_{13}). $\square$

Slijedeće četiri Arhimedove kružnice Lamoen uvodi pomoću homotetije pa započnimo s njenom definicijom.

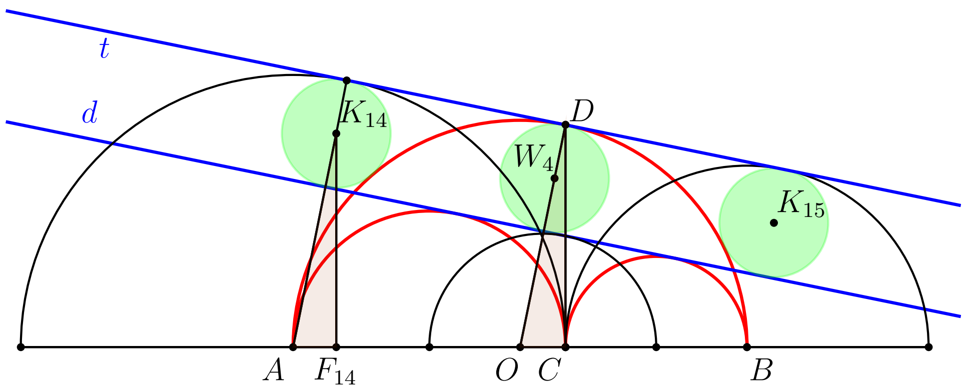
Definicija 3.2. *Neka je O točka u ravnini. Transformacija koja točki X ravnine pridružuje točku X' tako da je*

$$\overrightarrow{OX'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OX},$$

gdje je λ realan broj različit od nule, zove se homotetija. Točka O je središte, a broj λ koeficijent homotetije. Homotetiju ćemo označavati s $h(O, \lambda)$.

Značajna svojstva homotetije su očuvanje orijentacije i kutova.

Možemo primijetiti da su polukružnice $A(C)$, $B(C)$ i γ slike polukružnica α, β i (O') kada se na njih primijeni homotetija $h(C, 2)$. Iz toga slijedi da polukružnice $A(C)$, $B(C)$ i γ imaju zajedničku tangentu t koja je paralelna zajedničkoj tangenti polukružnica α, β i (O'). Prema tome, kružnica (K_{14}), odnosno (K_{15}), koja dira tangentu t i polukružnicu $A(C)$, odnosno $B(C)$, je Arhimedova, kao i Bankoffova četvrta kružnica (W_4).



Slika 33.

Promotrit ćemo još jedno svojstvo kružnica (K_{14}) i (K_{15}).

Teorem 3.21. *Kružnice (K_{14}) i (K_{15}) izvana diraju polukružnicu γ.*

Dokaz. Označimo sa d zajedničku tangentu polukružnica α, β i (O'). Udaljenost od točke A do tangente t jednaka je

$$2r_1 - 2p = 2r_1 - \frac{2r_1r_2}{r} = \frac{2r_1^2}{r}$$

pa je udaljenost od točke A do točke K_{14} jednaka $\frac{r_1(2r_1+r_2)}{r}$. Neka je F_{14} nožište visine iz točke K_{14} na pravac AB. Iz teorema 2.1 znamo da je $|CD| = 2\sqrt{r_1r_2}$ pa iz sličnosti trokuta OCD i trokuta $AF_{14}K_{14}$ slijedi da je

$$|K_{14}F_{14}| = \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r} \cdot |AK_{14}| = \frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}((2r_1+r_2))}{r},$$

$$|OF_{14}| = r + \frac{r_2-r_1}{r} \cdot |AK_{14}| = \frac{r_2^3 + 4r_1r_2^2 + 4r_1^2r_2 - r_1^3}{r}.$$

Računom možemo utvrditi da je

$$|K_{14}F_{14}|^2 + |OF_{14}|^2 = (r+p)^2.$$

Analogni postupak vrijedi za kružnicu (K_{15}).

□

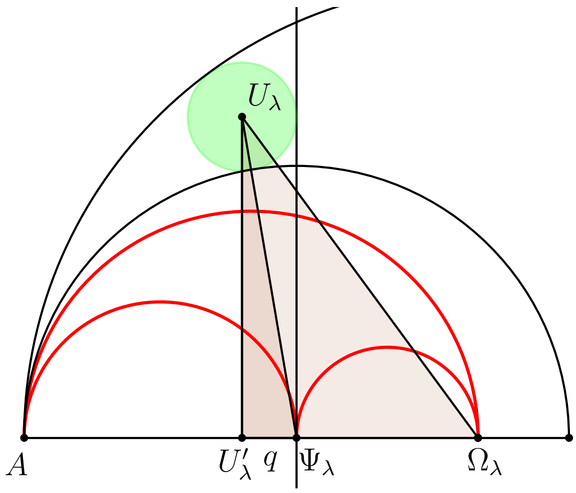
Lamoen je dodao da pravac O_1K_{15} prolazi kroz dodirnu točku pravca d i polukružnice β te da se ta točka nalazi i na kružnici $O_1(D)$.

Primijenimo sada homotetiju $h(A,\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ na polukružnice γ i α tako da kao slike dobijemo polukružnice (Ω_λ) i (Ψ_λ).

Označimo s $U_\lambda(q)$ kružnicu sa središtem u točki U_λ i radijusom q koja dira polukružnice (Ω_λ) i (Ψ_λ) i pravac CD. Pokazat ćemo da je ta kružnica Arhimedova.

Teorem 3.22. *Radijus kružnice $U_\lambda(q)$ jednak je $p = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1r_2}{r}$.*

Dokaz. Neka je U'_λ nožište okomice iz točke U_λ na pravac AB.



Slika 34a.

Vrijedi

$$|U'_\lambda \Omega_\lambda| = \lambda r - 2r_1 + q,$$

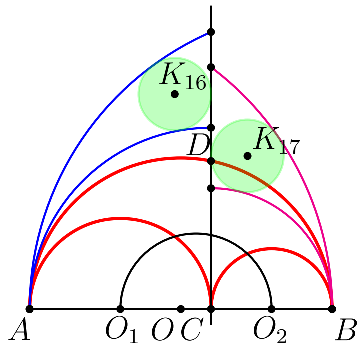
$$|U'_\lambda \Psi_\lambda| = (\lambda - 2)r_1 + q.$$

Iz pravokutnih trokuta $U_\lambda U'_\lambda \Omega_\lambda$ i $U_\lambda U'_\lambda \Psi_\lambda$ vrijedi (vidi 34a. sliku za $\lambda = 2$)

$$(\lambda r_1 + q)^2 - ((\lambda - 2)r_1 + q)^2 = (\lambda r - q)^2 - (\lambda r - 2r_1 + q)^2$$

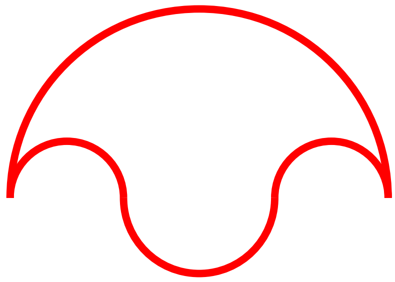
pa je $q = \frac{r_1 r_2}{r} = p$. □

Ovim teoremom smo definirali jednu beskonačnu familiju Arhimedovih kružnica u kojoj za $\lambda = 2$ dobivamo kružnice (K_{16}) i (K_{17}), a za $\lambda = 1$ Arhimedove blizance.



Slika 34b.

Spomenimo još da je Lamoen, proučavajući još jedan *Arhimedov lik* - salinon (vidi sliku 35.), otkrio nekoliko generalizacija nekih Arhimedovih kružnica.



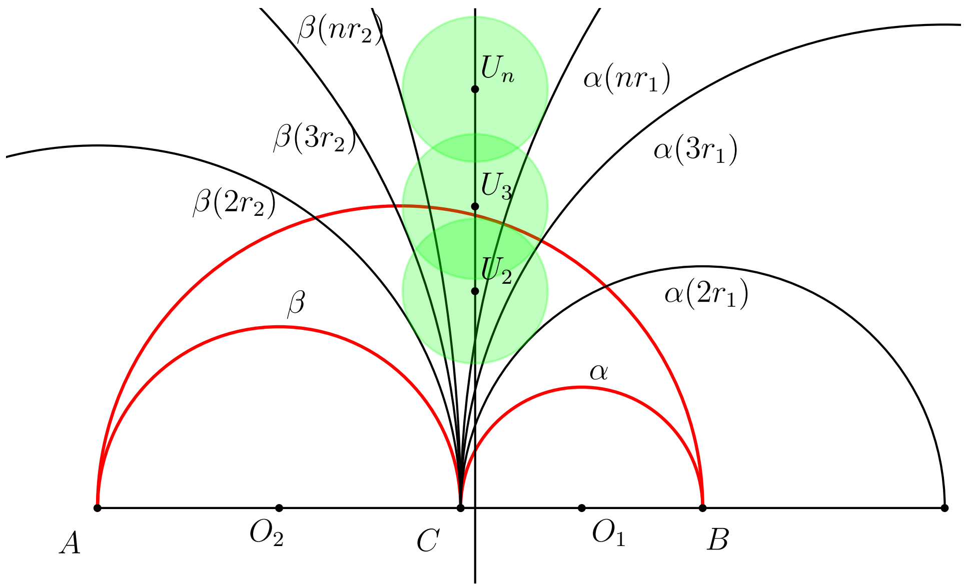
Slika 35.

4 Generalizacija Arhimedovih kružnica

4.1 Generalizacija Schochovih i Wooovih kružnica

Hiroshi Okumura[9] i Masayuki Watanabe[10] dali su 2004. godine generalizaciju prije spomenute Schochove kružnice $(W_{15}) \equiv (U_2)$ i Wooove kružnice (U_n) u članku [6]. Promatrali su što se događa s kružnicama $(W_{15}) \equiv (U_2)$ i U_n ako središta kružnica $A(C)$ i $B(C)$ postavimo u točku $(\pm n, 0)$, za bilo koji realni broj n.

Uvedimo oznake. Neka je arbelos dan kao na slici 36, neka se polukružnice α i β diraju u ishodištu koordinatnog sustava $C = (0, 0)$ tako da se polukružnica α nalazi u prvom kvadrantu, a polukružnica β u drugom te neka je središte polukružnice α, odnosno β, u točki $(r_1, 0)$, odnosno $(-r_2, 0)$.



Slika 36.

Za $n \in \mathbb{R}$ neka je $\alpha(n)$, odnosno $\beta(n)$, polukružnica u gornjoj poluravnini sa središtem $N = (n, 0)$, odnosno $N' = (-n, 0)$ i radijusom $|ON|$, odnosno $|ON'|$. Očito je $\alpha(r_1) = \alpha$ i $\beta(r_2) = \beta$.

Možemo primijetiti da su uz gornje oznake teoremi 3.6 i 3.7 dobro definirani, tj. da je udaljenost presjecišta polukružnice $\alpha(2r_1)$ i polukružnice γ do osi ordinata jednaka $2p$ te da je kružnica, koja iznutra dira polukružnicu γ i polukružnice $\alpha(2r_1)$ i $\beta(2r_2)$, Arhimedova.

4.1.1 Generalizacija Schochove kružnice (W_{15})

Neka su r_1' i r_2' realni brojevi. Uočimo da polukružnica $\alpha(r_1')$ dira α ili izvana ili iznutra ovisno o tome je li $r_1' > 0$ ili $r_1' < 0$. Pretpostaviti ćemo da $\alpha(r_1')$

[9] Hiroshi Okumura, japanski matematičar, profesor na Maebashi Institute of Technology
[10] Masayuki Watanabe, japanski matematičar, profesor na Maebashi Institute of Technology

leži u prvom kvadrantu, a $\beta(r_2^{'})$ u drugom.

Označimo sada sa $C(r_1^{'}, r_2^{'})$ kružnicu koja dira polukružnicu γ iznutra, a polukružnice $\alpha(r_1^{'})$ i $\beta(r_2^{'})$ izvana u točkama različitima od O.

Teorem 4.1. *Radijus kružnice $C(r_1^{'}, r_2^{'})$ jednak je $\frac{r_1 r_2 (r_1^{'}+r_2^{'})}{r_1 r_1^{'}+r_2 r_2^{'}+r_1^{'} r_2^{'}}$.*

Dokaz. Označimo s x radijus kružnice koja polukružnicu γ dira izvana, a polukružnice $\alpha(r_1^{'})$ i $\beta(r_2^{'})$ dira u točkama različitima od ishodišta.
Imamo dva slučaja. U prvom prije spomenuta kružnica dira i $\alpha(r_1^{'})$ i $\beta(r_2^{'})$ izvana, a u drugom dira $\alpha(r_1^{'})$ i $\beta(r_2^{'})$ iznutra. No, u oba slučaja ako primijenimo poučak o kosinusu kuta, vrijedi:

$$\frac{(r_1 - r_2 + r_2^{'})^2 + (r_1 + r_2 - x)^2 - (r_2^{'} + x)^2}{2(r_1 - r_2 + r_1^{'})(r_1 + r_2 - x)} =$$

$$-\frac{(r_1^{'} - (r_1 - r_2))^2 + (r_1 + r_2 - x)^2 - (r_1^{'} + x)^2}{2(r_1^{'} - (r_1 - r_2))(r_1 + r_2 - x)}.$$

Rješavanjem ove jednadžbe proizlazi da je $x = \frac{r_1 r_2 (r_1^{'}+r_2^{'})}{r_1 r_1^{'}+r_2 r_2^{'}+r_1^{'} r_2^{'}}$. □

Možemo primijetiti da se radijus $p = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ Arhimedovih kružnica postiže ako je $r_1^{'} = r_1$ i $r_2^{'} \to \infty$ ili obratno.

Neka je $P(r_1^{'})$ vanjsko središte sličnosti kružnica γ i $\alpha(r_1^{'})$ ako je $r_1^{'} > 0$, a ako je $r_1^{'} < 0$, neka je onda $P(r_1^{'})$ unutarnje središte sličnosti kružnica γ i $\alpha(r_1^{'})$ (slično za $P(r_2^{'})$).

Teorem 4.2. *Točke $P(r_1^{'})$ i $P(r_2^{'})$ se podudaraju ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{r_1}{r_1^{'}} + \frac{r_2}{r_2^{'}} = 1.$$

Dokaz. Ako se $P(r_1^{'})$ i $P(r_2^{'})$ podudaraju u točki $(t, 0)$, tada iz sličnosti slijedi

$$r_1^{'} : t - r_1^{'} = r_1 + r_2 : t - (r_1 - r_2) = r_2^{'} : t + r_2^{'}.$$

Ako iz prve i druge te druge i treće jednakosti izrazimo t, kratkim računom zaključujemo da tvrdnja vrijedi.
Obrat tvrdnje je očit iz jedinstvenosti oblika arbelosa i kružnica $\alpha(r_1^{'})$ i $\beta(r_2^{'})$. □

Iz teorema 4.1 i 4.2 slijedi generalizacija Schochove kružnice (W_{15}).

Teorem 4.3. *Kružnica $C(r_1^{'}, r_2^{'})$ je Arhimedova ako i samo ako se točke $P(r_1^{'})$ i $P(r_2^{'})$ podudaraju.*

Kada su i r_1' i r_2' pozitivni, tada se točke $P(r_1')$ i $P(r_2')$ podudaraju ako i samo ako tri polukružnice $\alpha(r_1')$, $\beta(r_2')$ i γ imaju zajedničku tangentu. Tako je u ovom slučaju kružnica $C(r_1', r_2')$ Arhimedova ako i samo ako $\alpha(r_1')$, $\beta(r_2')$ i γ imaju zajedničku tangentu. Može se još provjeriti da zajednička tangenta triju polukružnica dira polukružnicu γ točno u osi ordinata.

Arhimedovi blizanci se dobivaju u slučaju kada zajednička tangenta triju polukružnica $\alpha(r_1')$, $\beta(r_2')$ i γ dira polukružnicu γ u jednom od presjecišta s osi apscisa, tj. kada se jedna od polukružnica $\alpha(r_1')$ ili $\beta(r_2')$ "razvuče" u os ordinata, a preostala polukružnica podudara ili sa α ili sa β.

Korolar 4.3.1. *Neka su m i n pozitivni realni brojevi. Tada je kružnica $C(mr_1, nr_2)$ Arhimedova ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1.$$

4.1.2 Generalizacija Wooove kružnice (U_n)

Središte Wooove kružnice (U_n) je točka

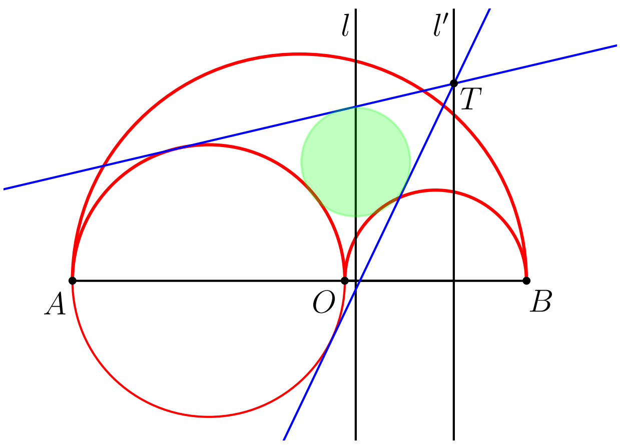
$$\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} p, 2p\sqrt{n + \frac{p}{r_1 + r_2}}\right). \tag{4.1}$$

Označimo s l Schochov pravac, a sa l' pravac $x = 2p$ u prvom kvadrantu. Tada l' siječe polukružnicu $\alpha(nr_1)$ u točki

$$(2p, 2\sqrt{p(nr_1 - p)}).$$

Uz ove oznake, slijedeći teorem daje jednu generalizaciju kružnice (U_n).

Teorem 4.4. *Ako je T točka na pravcu l', onda je kružnica k, čije središte leži na Schochovom pravcu i koja dira tangente iz točke T na kružnicu β, Arhimedova.*



Slika 37.

Dokaz. Označimo sa x radijus kružnice k. Iz slike 37 vrijedi

$$r_2 + 2p : r_2 = 2p - \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} p : x,$$

iz čega slijedi da je $x = p$.

□

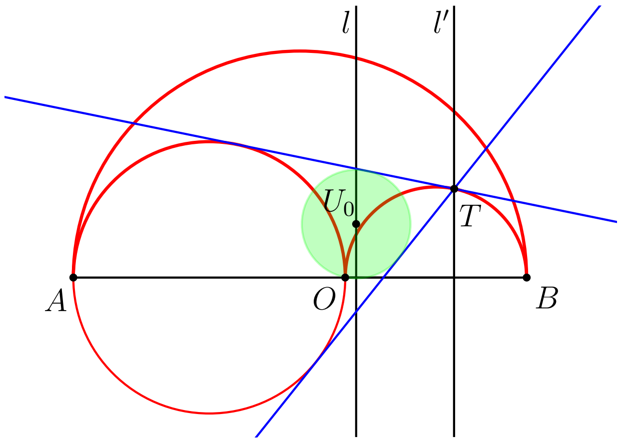
Skup Wooovih kružnica je pravi podskup kružnica opisanih u prethodnom teoremu.

Ordinata vanjskog centra sličnosti od kružnice (U_n) i polukružnice β jednaka je

$$2r_1 \sqrt{n + \frac{p}{r_1 + r_2}}.$$

Kažemo da je kružnica (U_n) određena točkom T ako (U_n) dira tangente iz točke T na kružnicu β. Ordinata presjecišta polukružnice α i pravca l' je $2r_1\sqrt{\frac{p}{r_1+r_2}}$. Promotrimo sada slijedeći teorem.

Teorem 4.5. *Kružnica (U_0) je određena presjecištem polukružnice α i pravca l'.*



Slika 38.

Dokaz. $(U_0) \equiv (W_{11})$, a kako je (W_{11}) zrcalno simetrična slika kružnice W_4 (vidi stranu 16), znamo da zajednička vanjska tangenta polukružnica α i β dira i $(U_0) \equiv (W_{11})$.

□

4.1.3 Woove kružnice (U_n) za $n < 0$

Woo je razmatrao kružnice (U_n) samo za ne-negativne brojeve n, no Okomura i Watanabe dopustili su i negativne brojeve. Pokazat ćemo da je moguće definirati Arhimedove kružnice koristeći $\alpha(nr_1)$ i $\beta(nr_2)$, gdje je n negativan broj, tako da vrijedi

$$-\frac{p}{r_1 + r_2} \leq n < 0.$$

Iz (4.1) je jasno zašto smo odabrali gornju nejednakost.

Teorem 4.6. *Neka za n vrijedi $-\frac{p}{r_1+r_2} \leq n < 0$. Tada je kružnica sa središtem na Schochovom pravcu, koja iznutra dira $\alpha(nr_1)$ i $\beta(nr_2)$, Arhimedova.*

Dokaz. Neka je x radijus kružnice sa središtem u (4.1) i neka dira $\alpha(nr_1)$ i $\beta(nr_2)$ iznutra i neka je $-\frac{p}{r_1+r_2} \leq n < 0$. Središta polukružnica $\alpha(nr_1)$ i $\beta(nr_2)$ su u točkama $(nr_1, 0)$ i $(nr_2, 0)$. Vrijedi

$$\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}p - nr_1\right)^2 + 4p^2\left(n + \frac{p}{r_1 + r_2}\right) = (x + nr_1)^2,$$

$$\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}p + nr_2\right)^2 + 4p^2\left(n + \frac{p}{r_1 + r_2}\right) = (x + nr_2)^2.$$

Rješenje obiju jednadžbi je $x = p$.

□

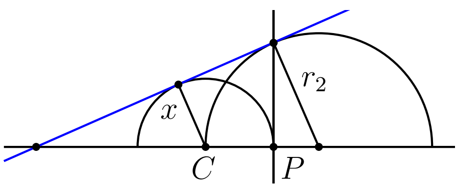
4.1.4 Generalizacija Wooove kružnice (U_0)

Opisat ćemo jednu beskonačnu familiju Arhimedovih kružnica koje prolaze kroz točku C.

Neka je x udaljenost od točke C do zajedničke tangente t polukružnica α i β. Kako kružnica $(U_0) \equiv (W_{11})$ prolazi kroz točku C i dira tangentu t, udaljenost od točke C do tangente t je $2p$, to jest $x = 2p$. Označimo s ϵ kružnicu radijusa $2p$ sa središtem u točki C. Kružnice (U_0) i ϵ diraju t u istoj točki. Iz (4.1) se lagano zaključuje da je udaljenost od točke (U_n) do točke C jednaka $p\sqrt{4n+1}$. Dakle, i (U_2) izvana dira kružnicu ϵ. Najmanja kružnica koja prolazi kroz točku C i dira kružnice (U_2) i ϵ u istoj točki je Schochova kružnica (W_{27}). Sve Arhimedove kružnice koje prolaze točkom C diraju kružnicu ϵ, a Bankoffova treća kružnica dira kružnicu ϵ u točki na osi ordinata.

Teorem 4.7. *Neka je C_1 kružnica sa središtem u točki C koja prolazi kroz točku P na osi apscisa te neka je C_2 kružnica sa središtem na osi apscisa koja prolazi kroz točku C. Ako se kružnica C_2 i okomica iz točke P na os apscisa sijeku, tada tangente kružnice C_2 iz tih točaka presjecišta diraju i kružnicu C_1.*

Dokaz. Neka je d udaljenost između točke C i presjecišta tangente t kružnice C_2 i osi apscisa, te neka je x udaljenost između tangente t i točke C. Označimo s r_1, odnosno r_2, radijus kružnice C_1, odnosno C_2. Možemo pretpostaviti da je $r_1 \neq r_2$. Pretpostavimo da je $r_1 < r_2$.

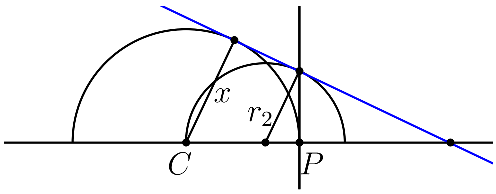


Slika 39a.

Tada je

$$r_2 - r_1 \colon r_2 = r_2 + d = x \colon d.$$

Pretpostavimo da je $r_1 > r_2$.



Slika 39b.

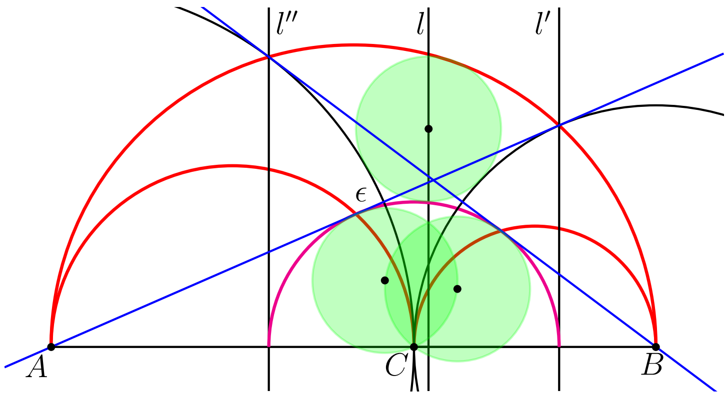
Tada je

$$r_1 - r_2 : r_2 = r_2 : d - r_2 = x : d.$$

U oba je slučaja $x = r_1$.

$\square$

Neka je t_n tangenta polukružnice $\alpha(nr_1)$ u njenom presjecištu s pravcem l'. To je dobro definirano ako je $n \geq \frac{r_2}{r_1+r_2}$. Prema teoremu 4.6 t_n je tangenta kružnice ϵ, što znači da je kružnica koja prolazi točkom C i dira t_n Arhimedova. Označimo tu kružnicu s $\mathcal{A}(n)$. Analogno možemo konstruirati Arhimedovu kružnicu $\mathcal{A}'(n)$ koja prolazi točkom C i dira tangentu t'_n polukružnice βnr_2 u njenom presjecištu s pravcem l'' čija je jednadžba $x = -2p$. Bankoffova kružnica je kongruentna kružnicama $\mathcal{A}\left(\frac{2p}{r_1}\right) = \mathcal{A}'\left(\frac{2p}{r_2}\right)$ budući da dira kružnicu ϵ u točki $(0, 2p)$.



Slika 40.

Prema teoremu 4.5, kružnica (U_0) je kongruentna kružnicama $\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}'(1)$.

Teorem 4.8. *Neka su m i n pozitivni brojevi. Arhimedove kružnice $\mathcal{A}(m)$ i $\mathcal{A}'(n)$ se podudaraju ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{1}{ma} + \frac{1}{nb} = \frac{1}{r} = \frac{1}{m} + \frac{1}{b}.$$

Dokaz. Jednadžbe tangenti t_m i t'_n su

$$-(mr_1 + (m-2)r_2)x + 2y\sqrt{r_2(mr_1 + (m-1)r_2)} = 2mr_1r_2,$$

$$(nr_1 + (n-2)r_1)x + 2y\sqrt{r_1(nr_2 + (n-1)r_1)} = 2mr_1r_2.$$

Ove tangente se podudaraju ako i samo ako vrijedi

$$\frac{1}{ma} + \frac{1}{nb} = \frac{1}{r} = \frac{1}{m} + \frac{1}{b}.$$

□

4.2 Generalizacija Powerovih kružnica

Hiroshi Okumura i Masayuki Watanabe generalizirali su i Powerove kružnice. Uvedimo sada oznake.

Označimo sa O_1, O_2 i O središta polukružnica α, β i γ. Neka je Q presjecište polukružnice γ i okomice iz točke O na pravac AB. Označimo sada sa δ kružnicu radijusa $k(r_1 + r_2)$ koja iznutra dira polukružnicu γ u točki Q, za $0 \leq k < 1$. Tangente od δ, koje su okomite na pravac AB, sijeku polukružnicu α, odnosno β, u točkama Q_1, odnosno Q_2, a pravac AB sijeku u točkama C_1, odnosno C_2. Uz ove oznake, vrijedi slijedeće:

Teorem 4.9. *Radijusi kružnica koje iznutra diraju polukružnicu γ i pravac OQ_1, odnosno OQ_2, u točkama Q_1, odnosno Q_2, iznose $2(1-k)p$, gdje je $p = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_1r_2}{r2}$.*

Dokaz. Vrijedi da je $|CC_1| = 2kr_1$. Odredimo sada $|OC_1|$. Vrijedi

$$|AC| = |AC_1| + |OC_1| + |OC| \Rightarrow |OC_1| = |AC| - |AC_1| - |OC|,$$

$$|OC| = |AC| - |AO| = 2r_1 - (r_1 + r_2) = r_1 - r_2,$$

$$|AC_1| = |AC| - |CC_1| = 2r_1 - 2kr_1,$$

$$|OC_1| = 2r_1 - 2r_1 + 2kr_1 - r_1 + r_2 = r_2 - r_1 + 2kr_1.$$

Iz pravokutnog trokuta AQ_1O vrijedi

$$|C_1Q_1|^2 = |AC_1||C_1C| = 4k(1-k)r_1^2.$$

Nadalje, prema Pitagorinom poučku u trokutu OC_1Q_1 vrijedi

$$|OQ_1|^2 = |OC_1|^2 + |C_1Q_1|^2 = (r_1 - r_2)^2 + 4kr_1r_2.$$

Označimo s x radijus jedne od kružnica koje diraju polukružnicu γ i pravac OQ_1 u točki Q_1, a središte te kružnice označimo sa R. Tada u pravokutnom trokutu ORQ_1 vrijedi

$$|Q_1R|^2 = |OR|^2 - |OQ_1|^2, \text{ tj.}$$

$$x^2 = (r_1 + r_2 - x)^2 - (r_1 - r_2)^2 - 4kr_1r_2.$$

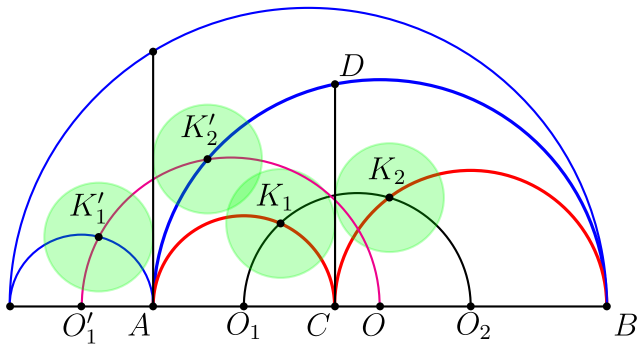
Rješavanjem ove jednadžbe dolazimo do toga da je $x = \frac{2(1-k)r_1r_2}{r_1+r_2} = 2(1-k)p$. Analognim postupkom dobiva se radijus preostalih kružnica.

□

Powerove kružnice se postižu kada je δ kružnica sa promjerom $|OQ|$.

4.3 Lamoenova metoda generalizacije

Floor van Lamoen je u [4] pokazao metodu kojom se iz svake Arhimedove kružnice može izvesti familija Arhimedovih kružnica. Konstruirajmo polukružnicu α' tako da joj se središte nalazi na pravcu AB i da dira polukružnicu γ u točki A te izgradimo novi arbelos kojemu su polukružnice α' i γ unutarnje polukružnice. Kada se α' dobro odabere, novi arbelos će sadržavati Arhimedove kružnice jednakog radijusa kao Arhimedove kružnice originalnog arbelosa. Ponavljanjem ovog postupka konstruiraju se beskonačne familije Arhimedovih kružnica.



Slika 41.

Ako je radijus polukružnice α' jednak r'', tada mora vrijediti

$$\frac{r_1r_2}{r} = \frac{rr''}{r+r''},$$

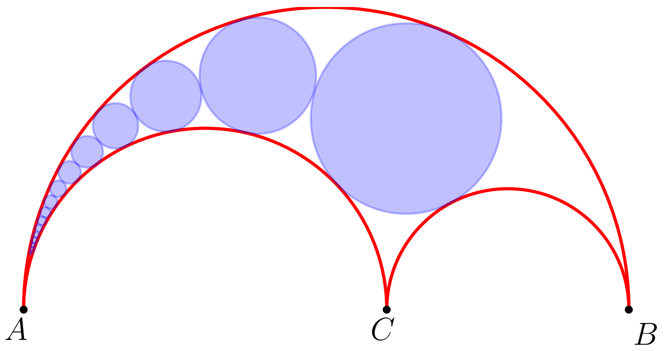
iz čega slijedi

$$r'' = \frac{rr_1r_2}{r^2 - r_1r_2}.$$

Možemo primijetiti da je r'' jednak radijusu upisane kružnice originalnog arbelosa (za radijus upisane kružnice arbelosa vidi dokaz teorema 3.2).

5 Pappusov lanac kružnica

U ovom poglavlju bit će opisan jedan zanimljiv niz kružnica unutar arbelosa, Pappusov lanac kružnica. Spomenut će se neka osnovna svojstva inverzije koja će se primjeniti u dokazu Pappusovog teorema i konstrukciji Pappusovog lanca kružnica te će ukratko biti prikazana primjena Pappusovog lanca u umjetnosti.



Slika 42.

5.1 Inverzija i neki teoremi o inverziji

Započnimo s definicijom inverzije.

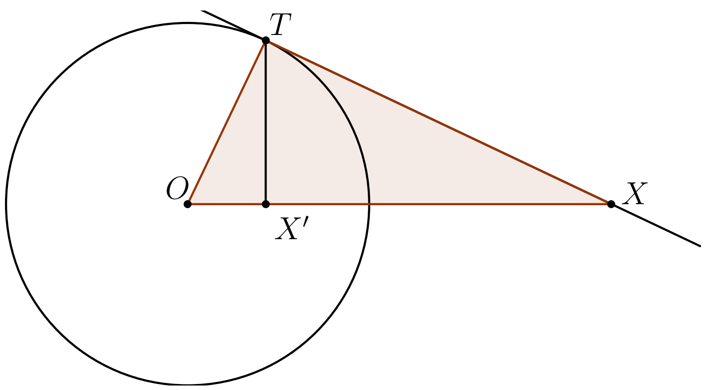
Definicija 5.1. *Neka je M ravnina i $O \in M$ čvrsta točka, a $R > 0$ zadani pozitivan broj. Preslikavanje*

$$I\colon M \setminus \{O\} \to M \setminus \{O\}, \quad I(T) = T'$$

zove se inverzija s centrom O i radijusom $R > 0$ ako su točke O,X i X' kolinearne, X i X' s iste strane točke O i ako vrijedi $|OX||OX'| = R^2$.

Inverzija u ravnini katkada se naziva i zrcaljenjem na kružnici pa kružnicu sa središtem u točki O i radijusom R nazivamo kružnicom inverzije.

Koristeći definiciju, lako se izvodi konstrukcija točke $X' = I(X)$. Neka je X točka izvan kružnice inverzije k, T dodirna točka kružnice k i tangente na kružnicu k iz točke X te neka je točka X' presjecište dužine OX i okomice iz točke T na pravac OX.



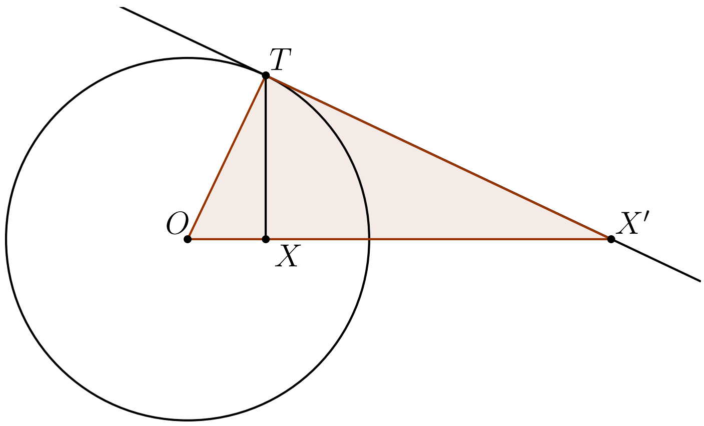
Slika 43.

Iz sličnosti pravokutnih trokuta TOX i TOX' vrijedi

$$\frac{|OT|}{|OX|} = \frac{|OX'|}{|OT|},$$

$$|OX||OX'| = |OT|^2 = R^2.$$

Neka je X točka unutar kružnice inverzije k. Povucimo okomicu na pravac određen točkama O i X u točki X i jedno presjecište te okomice i kružnice k označimo sa T. Neka je točka X' presjecište pravca OX i tangente kružnice k u točki T.



Slika 44.

Iz pravokutnih trokuta TOX i TOX' ponovo vrijedi

$$|OX||OX'| = |OT|^2 = R^2.$$

Inverzija će se pokazati korisnim alatom u dokazivanju nekih svojstava Pappusovog lanca kružnica, ali i u nekim geometrijskim konstrukcijama. Inverzija je korisna jer u nekim slučajevima kružnice preslikava u pravce, a pravce u kružnice, što uvelike olakšava predočavanje nekih tvrdnji. Koristeći inverziju, Leon Bankoff je pokazao mnogo svojih tvrdnji na temu arbelosa.

Slijedeći teoremi opisuju djelovanje inverzije na pravce i kružnice, a bit će prikazani bez dokaza. Dokazi se mogu proučiti u [7].

Iz konstrukcije točke $X' = I(X)$, koja je bila postavljena na pravcu koji prolazi kroz ishodište kružnice inverzije, možemo uočiti da se svaki pravac koji sadrži središte inverzije preslikava na samoga sebe.

Uz to svojstvo, vrijede slijedeće dvije tvrdnje:

Teorem 5.1. *i) Inverzija preslikava pravac koji ne sadržava središte inverzije na kružnicu koja sadržava središte inverzije.*

ii) Inverzija preslikava kružnicu koja sadržava središte inverzije na pravac koji ne sadržava središte inverzije.

Iz ovih tvrdnji može se zaključiti da inverzija ne čuva kolinearnost.

Ostaje nam još za raspraviti kako inverzija preslikava kružnicu koja ne sadrži središte inverzije. Kao i u slučaju pravca koji sadrži središte inverzije, tako se i kružnica inverzije identički preslikava na samu sebe i to je jedina kružnica u ravnini s tim svojstvom. No, postoje i kružnice koje se neidentički preslikavaju same na sebe. To su kružnice koje su okomite na kružnicu inverzije.

Definicija 5.2. *Kružnica K_1 je okomita kružnici K ako je $K \cap K_1 = \{T, T_1\}$ i tangenta kružnice K_1 u točki T (i T_1) sadrži središte kružnice K.*

Za okomite kružnice vrijede slijedeće tvrdnje

Teorem 5.2. *i) Inverzija preslikava svaku kružnicu, koja je okomita kružnici inverzije, na samu sebe.*

ii) Ako kružnica, koja je okomita na kružnicu inverzije, sadrži točku A, onda sadrži i točku $I(A)$.

iii) Vrijedi i obrat, tj. kružnica koja za svaku svoju točku A sadrži i točku $I(A)$ je okomita na kružnicu inverzije.

Još jedno važno svojstvo inverzije je činjenica da inverzija čuva kutove, tj. inverzija je konformalno preslikavanje.

Teorem 5.3. *Kut između dviju kružnica, pravca i kružnice ili dvaju pravaca jednak je kutu između pripadnih inverznih slika.*

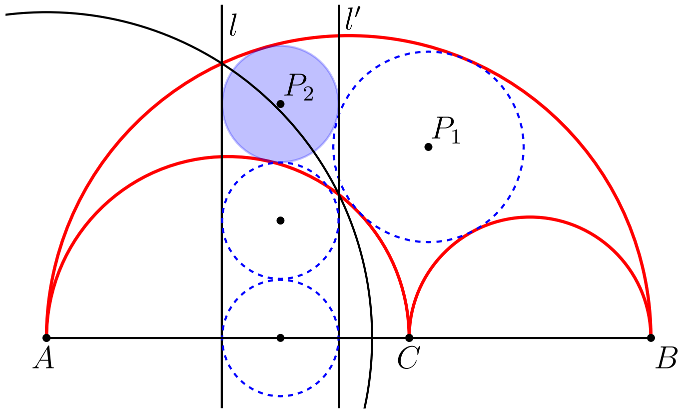
5.2 Pappusov teorem

Pappus je dokazao teorem pomoću kojega se može odrediti ordinata središta kružnica u Pappusovom lancu kružnica. On je dokaz proveo elementarnom geometrijom, a u ovom radu dokaz će se provesti primjenom inverzije. Uvedimo oznake.

Definicija 5.3. *Neka su $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$ kružnice u Pappusovom lancu kružnica čija su središta u točkama $P_1, P_2, \ldots, P_n$, a radijusi $p_1, p_2, \ldots, p_n$.*

Svaka od kružnica $(P_2), \ldots, (P_n)$ dira polukružnice α i γ te kružnicu (P_{n-1}). Posebno, kružnica (P_1) dira sve tri polukružnice arbelosa, tj. ona je arbelosu upisana kružnica.

Teorem 5.4 (Pappusov teorem)**.** *Udaljenost središta kružnice (P_n) do pravca AB, u oznaci h_n, jednaka je $h_n = 2np_n$.*



Slika 45.

Dokaz. Promotrimo slučaj $n = 2$.

Neka je točka A središte inverzije I. Uzmimo za kružnicu inverzije kružnicu sa središtem u točki A koja je okomita kružnici (P_2). Očito je $I(P_2) = P_2$ jer inverzija preslikava svaku kružnicu, koja je okomita kružnici inverzije, na samu sebe.

Inverzna slika polukružnice γ je pravac l, a inverzna slika polukružnice α je pravac l'. Inverzna slika polukružnice (P_1) je kružnica koja dira pravce l i l' i "dno" kružnice (P_2). Inverzna slika (polu)kružnice β je (polu)kružnica koja dira pravce l i l' i "dno" inverzne slike kružnice (P_1).

Jasno je da su kružnice P_2, $I(P_1)$ i $I(\beta)$ kongruentne pa je očito

$$h_2 = p_2 + 2p_2 + p_2,$$

tj. $h_2 = 4p_2 = 2 \cdot 2p_2$.

Jasno je da se dokaz jednako provodi i u općem slučaju pa možemo zaključiti da zaista vrijedi $h_n = 2np_n$.

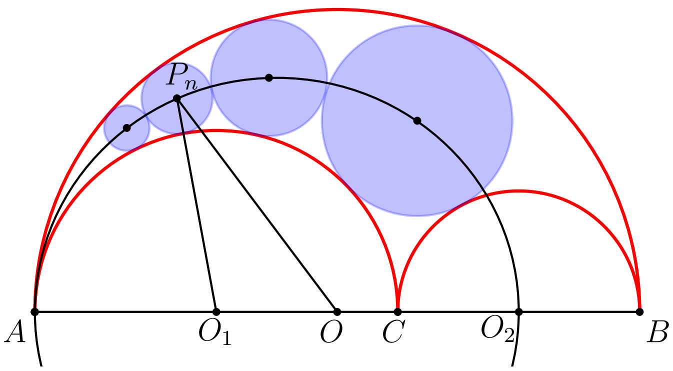
□

Postavlja se pitanje kako je Pappus dokazao prethodni teorem kada je tehnika inverzije uvedena tek u 19. stoljeću. Za više informacija i odgovor na to pitanje, korisno je proučiti Bankoffov članak[11] *"How did Pappus do it?"*.

Pappus je pokazao i da se središta kružnica u lancu nalaze na elipsi.

Teorem 5.5. *Središta kružnica $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$ nalaze se na elipsi sa žarištima u točkama O i O_1.*

[11] Bankoff, Leon "How Did Pappus Do It?" In The Mathematical Gardner (Ed. D. Klarner). Boston, MA: Prindle, Weber, and Schmidt, str. 112-118, 1981.



Slika 46.

Dokaz. Elipsa je definirana kao skup točaka za koje je suma udaljenosti do dvije fiksne točke konstantna. Promotrimo sumu udaljenosti središta proizvoljne kružnice (P_n) do točaka O_1 i O_2 .

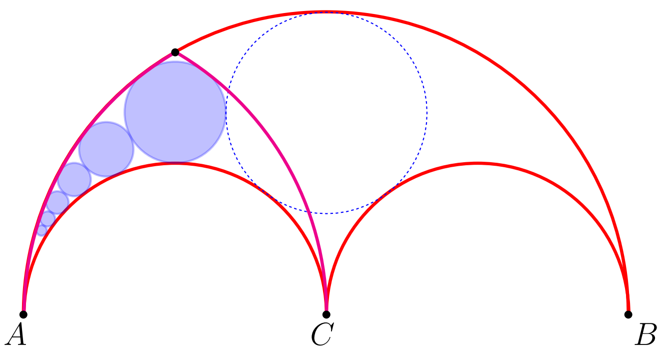
$$|O_1P_n| + |OP_n| = (r_1 + p_n) + (r - p_n) = r_1 + p.$$

Dakle, središta kružnica $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$ nalaze se na elipsi jer vrijedi da je suma udaljenosti do točaka O i O_1 konstantna.

□

5.3 Primjena Pappusovog lanca kružnica u umjetnosti

Konstruirajmo arbelos u kojem su radijusi polukružnica α i β jednaki i upišimo mu Pappusov lanac kružnica. Konstruirajmo dva kružna luka radijusa $|AC|$ tako da je središte jednog luka u točki A, a središte drugog luka u točki C. Novonastala figura je gotički luk.



Slika 47.

6 Zlatni omjer u arbelosu

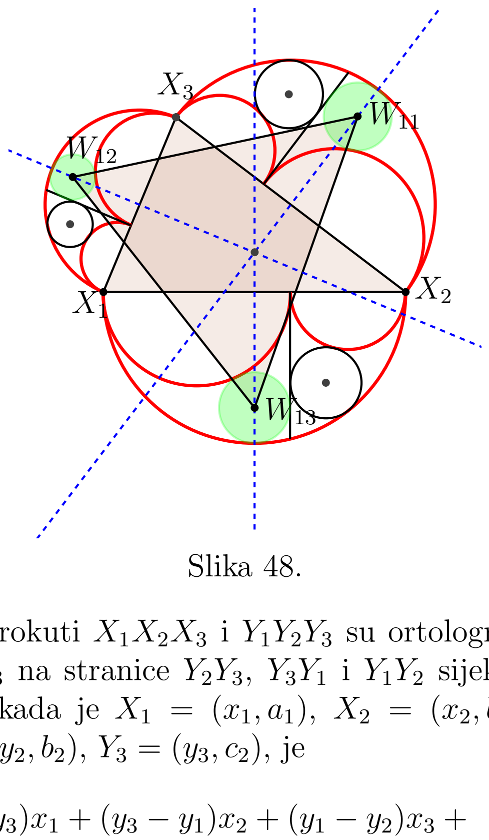
U ovom poglavlju bit će predstavljena jedna veza zlatnog omjera i arbelosa. Promatrat će se veza trokuta nad čijim stranicama su konstruirani arbelosi i trokuta kojeg određuju središta Arhimedovih kružnica koje pripadaju prije spomenutim arbelosima.

Uvedimo nove oznake za arbelos. Za točke X i Y ravnine i realan broj s neka je Z točka takva da je

$$|XZ| : |ZY| = s.$$

Sada možemo nad točkama X, Y i Z izgraditi arbelos u oznaci (X, Y, s).

Odabirom bilo kojih triju nekolinearnih točaka X_1, X_2 i X_3 određen je trokut $X_1X_2X_3$ pa nad njegovim stranicama možemo konstruirati arbelose (X_2, X_3, s), (X_3, X_1, s) i (X_1, X_2, s). Pokazat ćemo da trokut, kojega čine središta Arhimedove kružnice (W_1) u arbelosima (X_2, X_3, s), (X_3, X_1, s) i (X_1, X_2, s) ortologan s trokutom $X_1X_2X_3$ ako i samo ako je s jednak zlatnom omjeru, to jest $s = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



Slika 48.

Podsjetimo se, trokuti $X_1X_2X_3$ i $Y_1Y_2Y_3$ su ortologni ako se okomice iz vrhova X_1, X_2 i X_3 na stranice Y_2Y_3, Y_3Y_1 i Y_1Y_2 sijeku u jednoj točki, a uvjet ortolognosti, kada je $X_1 = (x_1, a_1)$, $X_2 = (x_2, b_1)$, $X_3 = (x_3, c_1)$ i $Y_1 = (y_1, a_2)$, $Y_2 = (y_2, b_2)$, $Y_3 = (y_3, c_2)$, je

$$\begin{aligned}(y_2 - y_3)x_1 + (y_3 - y_1)x_2 + (y_1 - y_2)x_3 +\\ + (b_2 - c_2)a_1 + (c_2 - a_2)b_1 + (a_2 - b_2)c_1 = 0.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Teorem 6.1. *i) Trokut* $W_{11}W_{12}W_{13}$*, gdje su točke* W_{11}*,* W_{12} *i* W_{13} *središta prve Arhimedove kružnice* (W_1) *u arbelosima* (X_2, X_3, s)*,* (X_3, X_1, s) *i* (X_1, X_2, s)*, je ortologan trokutu* $X_1X_2X_3$ *ako i samo ako je* s *jednak zlatnom omjeru, to jest* $s = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$*.*

ii) Trokut $W_{21}W_{22}W_{23}$*, gdje su točke* W_{21}*,* W_{22} *i* W_{23} *središta druge Arhimedove kružnice u arbelosima* (X_2, X_3, s)*,* (X_3, X_1, s) *i* (X_1, X_2, s)*, je ortologan trokutu* $X_1X_2X_3$ *ako i samo ako je* s *jednak* $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$*.*

Dokaz. i) Bez smanjenja općenitosti, neka su koordinate točaka X_i zadane kao $X_i = (c_i, d_i)$ gdje je $c_i = \cos x_i$ i $d_i = \sin x_i$, za $i = 1, 2, 3$. Tada su koordinate točke W_{11} dane sa

$$W_{11} = \left(\frac{Ac_2 + Bc_3 - 2C(d_2 - d_3)}{2(s+1)^2}, \frac{Ad_2 + Bd_3 - 2C(c_2 - c_3)}{2(s+1)^2} \right)$$

(za dokaz vidi [1]), gdje je $A = 2 + 3s$, $B = s(1 + 2s)$ i $C = s\sqrt{s+1}$. Točke W_{12} i W_{13} imaju slične koordinate dobivene zamjenom c_i i d_i. Uvjet ortolognosti (6.1) za trokute $X_1X_2X_3$ i $W_{11}W_{12}W_{13}$ je

$$\frac{(s^2 - s - 1)(3 - \cos(x_2 - x_3) - \cos(x_3 - x_1) - \cos(x_1 - x_2))}{(s+1)^2} = 0,$$

što vrijedi ako i samo ako je $s = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

ii) Dokaz se provodi analogno. Uvjet ortolognosti za trokute $X_1X_2X_3$ i $W_{21}W_{22}W_{23}$ je

$$\frac{(s^2 + s - 1)(3 - \cos(x_2 - x_3) - \cos(x_3 - x_1) - \cos(x_1 - x_2))}{(s+1)^2} = 0,$$

što vrijedi ako i samo ako je $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

□

7 Geometrijske konstrukcije

U ovom poglavlju će biti opisane geometrijske konstrukcije Arhimedovih blizanaca elementarnim konstrukcijskim metodama te konstrukcija arbelosu upisane kružnice i Pappusovog lanca kružnica pomoću inverzije. Interaktivni prikaz ovih konstrukcija, kao i konstrukcije drugih Arhimedovih kružnica, nalaze se na priloženom CD-u.

7.1 Konstrukcija Arhimedovih blizanaca

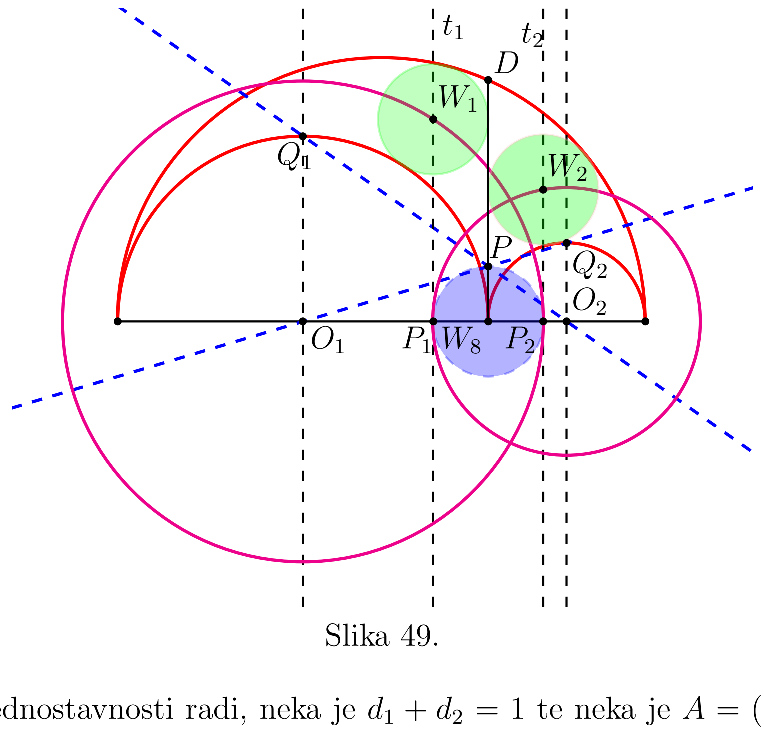
Konstrukcija 7.1. *Neka je točka Q_1, odnosno Q_2, presjecište polukružnice α, odnosno β, i okomice na pravac AB, povučene iz središta polukružnice α, odnosno β.*

Označimo s P presjecište dužina Q_1O_2 i Q_2O_1. To presjecište se nalazi na pravcu CD. Konstruirajmo kružnicu (W_8) sa središtem u točki C i radijusom $p = |CP|$. Ta kružnica je Arhimedova.

Označimo s P_1 i P_2 presjecišta kružnice (W_8) i pravca AB te povucimo tangente t_1 i t_2 na kružnicu (W_8) u točkama P_1 i P_2.

Presjecište tangente t_1 kružnice (W_8), odnosno t_2, u točki P_1, odnosno P_2, i polukružnice $O_1(P_2)$, odnosno polukružnice $O_2(P_1)$, dati će točku W_1, odnosno W_2, koja je središte kružnice (W_1), odnosno (W_2).

Konačno, kružnice povučene kroz točke W_1 i W_2 sa radijusom $p = |CP|$ su Arhimedovi blizanci.



Slika 49.

Dokaz. Jednostavnosti radi, neka je $d_1 + d_2 = 1$ te neka je $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (d_1, 0)$.
U konstrukciji tvrdimo da se presjecište P pravaca Q_1O_2 i Q_2O_1 nalazi na

pravcu CD, tj. pravcu $x = d_1$. Pogledajmo koordinate točaka O_1, O_2, Q_1, i Q_2.

$$\begin{array}{ll} Q_1 = (\frac{d_1}{2}, \frac{d_1}{2}) & O_2 = (d_1 + \frac{d_2}{2}, 0) \\ Q_2 = (d_1 + \frac{d_2}{2}, \frac{d_2}{2}) & O_1 = (\frac{d_1}{2}, 0) \end{array}$$

Jednadžbe pravaca Q_1O_2 i Q_2O_1 dane su s

$$y = d_2(x - \frac{d_1}{2})$$

$$y = -d_1(x - \frac{d_1}{2}) + \frac{d_1}{2}.$$

Ako izjednačimo jednadžbe, dobit ćemo da je $x = d_1$, tj. točka P se nalazi na pravcu CD.

Dalje tvrdimo da je kružnica (W_8) Arhimedova, tj. da je $|CP| = 2r_1r_2$. Točka C ima koordinate $C = (d_1, 0) = (2r_1, 0)$, a točka P ima koordinate $P = (d_1, y_P) = (2r_1, y_P)$. Znamo da je P točka na pravcima Q_1O_2 i Q_2O_1 pa je

$$y_P = d_2(d_1 - \frac{d_1}{2}) = \frac{d_1 d_2}{2} = 2r_1r_2.$$

Dakle, kružnica (W_8) je Arhimedova.

Odredimo koordinate točke W_1, odnosno W_2.
W_1 je presjecište pravca $x = d_1 - \frac{d_1 d_2}{2}$ i polukružnice $O_1(P_2)$. Očito je apscisa središta jednaka $x_{W_1} = d_1 - \frac{d_1 d_2}{2}$. Vrijedi da je

$$|O_1P_2| = |O_1P| + |PP_2| = \frac{d_1}{2} + \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Dakle, jednadžba kružnice $O_1(P_2)$ je

$$(x - \frac{d_1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}(d_1 + d_1 d_2)^2.$$

Pa je ordinata presjecišta kružnice $O_1(P_2)$ i pravca $x_{W_1} = d_1 - \frac{d_1 d_2}{2}$ jednaka

$$y_{W_1} = d_1\sqrt{d_2}.$$

Uz malo primjene analitičke geometrije, lako je provjeriti da kružnica

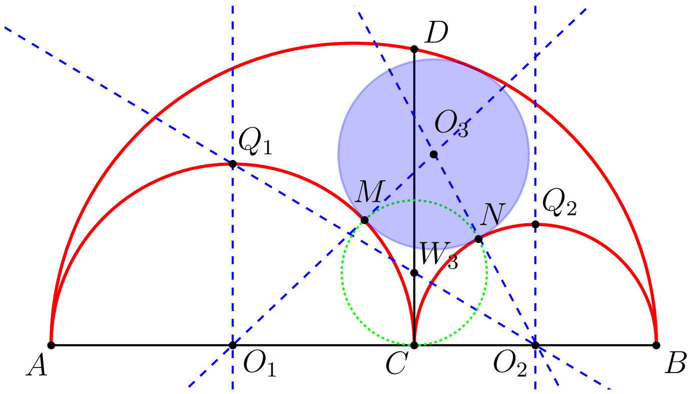
$$(x - x_{W_1})^2 + (y - y_{W_1})^2 = \left(\frac{d_1 d_2}{2}\right)^2$$

siječe svaku od polukružnica α i γ, kao i pravac $x = d_1$, točno u jednoj točki. Analogni postupak primjenjuje se za koordinate točke W_2.

$\square$

7.2 Konstrukcija arbelosu upisane kružnice

Konstrukcija 7.2. *Primjenom konstrukcije 7.1 konstruirajmo kružnicu* (W_3)*. Neka je točka* M *presjecište polukružnice* α *i kružnice* (W_3) *te neka je točka* N *presjecište polukružnice* β *i kružnice* (W_3)*. Povucimo pravce* O_1M *i* O_2N *i njihovo presjecište označimo sa* O_3*. Tada je kružnica sa središtem u točki* O_3 *i radijusom* $|O_3M| = |O_3N|$ *arbelosu upisana kružnica.*



Slika 50.

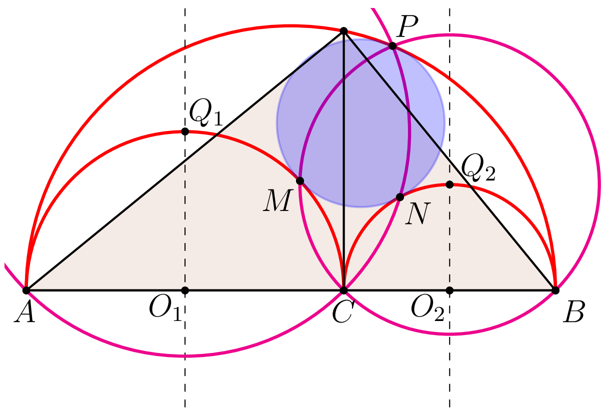
Dokaz. Dokaz konstrukcije je očit iz teorema 3.2.

□

7.3 Konstrukcija arbelosu upisane kružnice primjenom inverzije

Konstrukcija 7.3. *Neka je točka* Q_1*, odnosno* Q_2*, presjecište polukružnice* α*, odnosno* β*, i okomice na pravac* AB*, povučene iz središta polukružnice* α*, odnosno* β*. Konstruirajmo kružnice* $Q_1(C)$ *i* $Q_2(C)$*.*

Neka je točka M *presjecište kružnice* $Q_2(C)$ *i polukružnice* α*, točka* N *presjecište kružnice* $Q_1(C)$ *i polukružnice* β*, a točka* P *presjecište kružnica* $Q_1(C)$ *i* $Q_2(C)$ *(točka* C *je drugo presjecište tih kružnica). Tada je kružnica određena točkama* M*,* N *i* P *arbelosu upisana kružnica.*



Slika 51.

Dokaz konstrukcije je izravna posljedica slijedećeg Bankoffovog teorema.

Teorem 7.1. *Neka je točka Q_1, odnosno Q_2, presjecište polukružnice α, odnosno β, i okomice na pravac AB. Ako arbelosu upisana kružnica (kraće (MNP)) dira polukružnice α, β i γ u točkama N, M i P, onda vrijedi*

i) Točke A, C, N i P leže na kružnici sa središtem u točki Q_1,

ii) Točke B, C, M i P leže na kružnici sa središtem u točki Q_2.

Dokaz. Ovaj teorem ćemo dokazati primjenom inverzije čija smo osnovna svojstva spomenuli u poglavlju 5.

Promotrimo pravokutni trokut ADB sa pravim kutom u vrhu D.

Uočimo da vrijedi slijedeće

$$|AB| = |AC|+|CB| \Rightarrow |AB|^2 = |AC|^2+2|AC||CB|+|CB|^2 = |AD|^2+|DB|^2,$$

$$|AC|^2+|AC||CB| = |AC|(|AC|+|CB|) = |AD|^2+|BD|^2-|AC||CB|-|CB|^2,$$

$$|AC||AB| = |AD|^2 + |BD|^2 - |AC||CB| - |CB|^2. \tag{7.1}$$

Tako iz pravokutnog trokuta BCD vrijedi

$$|BD|^2 = |CD|^2 + |CB|^2 \tag{7.2}$$

a kako je $|CD|$ visina pravokutnog trokuta ADB, dalje vrijedi

$$|CD^2| = |AC||CB|. \tag{7.3}$$

Uvrštavanjem (7.3) u (7.2) dobivamo

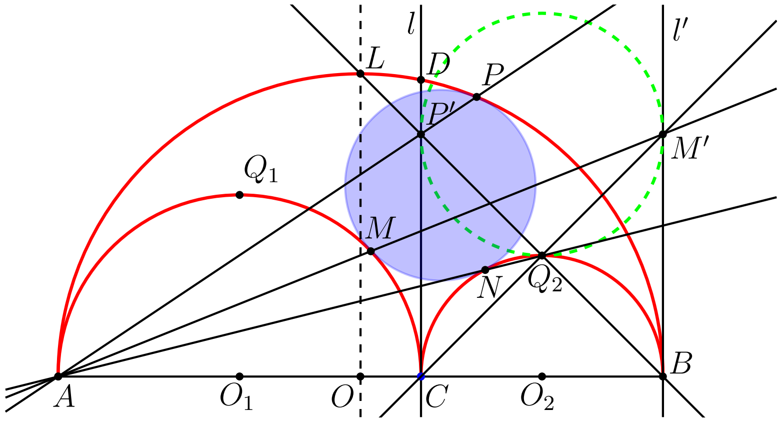
$$|BD|^2 - |AC||CB| - |CB|^2 = 0 \tag{7.4}$$

a uvrštavanjem (7.4) u (7.1) dobivamo

$$|AC||AB| = |AD|^2. \tag{7.5}$$

Koristeći (7.5), odaberimo inverziju I s obzirom na kružnicu sa središtem u točki A i radijusom $|AD|$. Inverzija I očito preslikava točku B u točku C, a pravac AB u samog sebe. Iz teorema o inverziji spomenutih u poglavlju 5 slijedi da je inverzna slike polukružnice γ, odnosno α, pravac l, odnosno l', koji je okomit na pravac AB u točki C, odnosno B. Kako je polukružnica β ortogonalna pravcu AB, tada inverzija I preslikava β opet u β.

Kružnica (MNP) invertira se u kružnicu koja dira polukružnicu β tako da se točka M invertira u točku M' na pravcu l', točka N u točku Q_2 na polukružnici β, a točka P u točku P' na pravcu l.



Slika 52.

Budući da je polukružnica β invarijantna, točke A, N i Q_2 su kolinearne. Točke M' i P' su takve da su pravci kroz točke BQ_2P' i CQ_2M' međusobno okomiti, tj. pravac CQ_2M' tvori kut od $45°$, a pravac BQ_2P' tvori kut od $135°$ s pravcem AB. Iz toga slijedi da pravac BQ_2P' siječe polukružnicu γ u točki L koja je presjecište polukružnice γ i okomice iz središta polukružnice γ na pravac AB. Sada je inverzna slika pravca, koji prolazi točkama B, Q_2, P' i L, kružnica koja prolazi kroz točke A, C, N i P. Iz teorema o inverziji u poglavlju 5 znamo da je inverzija konformalno preslikavanje pa kut između kružnice koja prolazi točkama A, C, N i P i pravca AB iznosi $45°$. Dakle, središte te kružnice je točka Q_1. Time smo dokazali da točke N i P leže na kružnici $Q_1(C)$.

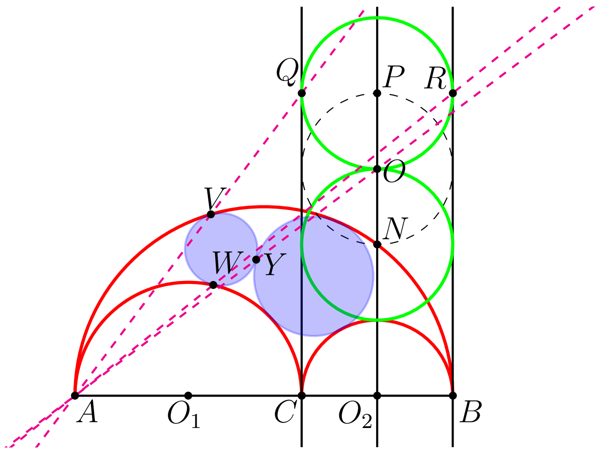
Analognim postupkom dokazujemo da točke M i P leže na kružnici $Q_2(C)$.

□

7.4 Konstrukcija Pappusovog lanca kružnica

Konstrukcija Pappusovog lanca kružnica je, takoreći, trivijalna kada imamo dokazan teorem 7.1. Prva kružnica u Pappusovom lancu, kružnica (P_1), je arbelosu upisana kružnica, čiju smo konstrukciju primjenom inverzije opisali. Koristeći istu inverziju I kao u teoremu 7.1 možemo konstruirati drugu kružnicu u lancu, kružnicu (P_2), tj. kružnicu koja dira polukružnice γ i α te (P_1).

Inverzna slika kružnice P_2 bit će kružnica koja dira pravce l i l' u točkama Q i R te inverznu sliku kružnice (MNP) iz teorema 7.1 u točki O. Neka je presjecište pravca AO i kružnice P_1 točka Y, presjecište pravca AR i polukružnice α točka W i presjecište pravca AQ i polukružnice γ neka je točka V. Tada je točkama Y, W i V određena kružnica P_2.



Slika 53.

Analognim postupkom konstruiramo svaku slijedeću kružnicu u Pappusovom lancu kružnica.

Literatura

[1] Z. Čerin, *Centres of the golden ratio Archimedean twin circles*, Studies of the University of Žilina, Mathematical Series **18** (2004), 5-16.

[2] E. Danneels and F.M. van Lamoen, *Midcircles and the Arbelos*, Forum Geometricorum **7** (2007), 53-65.

[3] C. W. Dodge, T. Schoch, P.Y. Woo, and P. Yiu, *Those Ubiquitous Archimedean Circles*, Mathematics Magazine **72** (1999), 202-213.

[4] F. M. van Lamoen, *Archimedean Adventures*, Forum Geometricorum **6** (2006), 79-96.

[5] H. Okumura and M. Watanabe, *A generalization of Power's Archimedean Circles*, Forum Geometricorum **6** (2006), 103-105.

[6] H. Okumura and M. Watanabe, *The Archimedean Circles of Schoch and Woo*, Forum Geometricorum **4** (2004), 27-34.

[7] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[8] F. Power, *Some More Archimedean Circles in the Arbelos*, Forum Geometricorum **5** (2005), 133-134.

[9] P. Woo, *Simple Constructions of the Incircle of an Arbelos*, Forum Geometricorum **1** (2001), 133-136.

[10] P. Yiu, *Elegant Geometric Constructions*, Forum Geometricorum **5** (2005), 75-96.