O spektru nelinearnih operatora

Sanela Halilović, Samra Pirić

Sažetak

U ovom radu pokazujemo da preslikavajući spektar nelinearnih operatora ne zadržava neke bitne osobine koje ima spektar linearnih operatora. To ilustriramo nizom primjera.

Ključne riječi: spektar, nelinearni operator, bijekcija

1 Uvod

Dobro je poznata važnost spektralne teorije za linearne operatore. Podsjetimo se nekih najznačajnijih osobina spektra linearnih operatora. Neka je X Banachov prostor nad poljem $\mathbb{K}$ realnih ili kompleksnih brojeva.

Definicija 1.1. *Spektar ograničenog linearnog operatora $L : X \to X$ je skup*

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - L \text{ nije bijekcija}\}. \tag{1}$$

Za svako $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \sigma(L)$ postoji rezolventni operator $(\lambda I - L)^{-1}$ koji je ograničen.

Definicija 1.2. *Neka je X kompleksan Banachov prostor, $\sigma(L)$ spektar ograničenog linearnog operatora L i $\lambda \in \sigma(L)$.*
*1) Kažemo da λ pripada točkovnom spektru ako $\lambda I - L$ nije injekcija. Skup svih takvih λ označavamo sa $\sigma_p(L)$ i nazivamo **točkovnim spektrom** operatora L.*
*2) λ je element neprekidnog spektra ako je $\lambda I - L$ injekcija i $(\lambda I - L)(X)$ gust potprostor od X. Skup svih takvih λ označavamo sa $\sigma_c(L)$ i nazivamo **neprekidnim spektrom** operatora L.*
*3) λ je element rezidualnog spektra ako je $\lambda I - L$ injekcija, ali $(\lambda I - L)(X)$ nije gust potprostor od X. Skup svih takvih λ označavamo sa $\sigma_r(L)$ i nazivamo **rezidualnim spektrom** operatora L.*

U slučaju da $dim X < \infty$ onda je $\sigma(L) = \sigma_p(L)$. Primijetimo da $\lambda_0 \in \sigma_c(L)$ povlači da operator $(\lambda_0 I - L)$ ima inverzni operator $(\lambda_0 I - L)^{-1}$ ali da taj nije ograničen. Situacija $\lambda_0 \in \sigma_r(L)$ znači da rezolventni operator postoji, ali njegovo područje definicije nije gusto u X; u tom slučaju rezolventni operator može biti ograničen ili neograničen.

Slobodno govoreći, elementi λ u subspektru $\sigma_p(L)$ karakteriziraju neki gubitak injektivnosti, oni iz $\sigma_r(L)$ neki gubitak surjektivnosti, a oni iz $\sigma_c(L)$ neki gubitak stabilnosti operatora $\lambda I - L$.

Ovi dijelovi spektra formiraju disjunktnu podjelu spektra

$$\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L) \cup \sigma_r(L).$$

Vrijedi i sljedeći teorem koji daje tzv. formulu spektralnog preslikavanja polinoma.

Teorem 1.3. *Neka je L linearan operator u Banachovu prostoru X nad poljem $\mathbb{K}$. Za svaki polinom $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ vrijedi*

$$\sigma(p(L)) = p(\sigma(L)), \tag{2}$$

gdje je $p(L) = a_nL^n + \cdots + a_1L + a_0I$ i $p(\sigma(L)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(L)\}$.

Spektar linearnog operatora $\sigma(L)$ ima sljedeće važne osobine:

- zatvoren je i ograničen skup (dakle kompaktan)
- neprazan je skup kad je $\mathbb{K}$ polje kompleksnih brojeva
- vrijedi formula spektralnog preslikavanja (2).

2 Preslikavajući spektar

Kod definiranja spektra nelinearnih operatora, cilj je, po mogućnosti:

- u slučaju linearnog operatora da se svodi na poznati spektar (1),
- da ima bar neke zajedničke osobine s linearnim spektrom (npr. zatvorenost, kompaktnost),
- da sadrži svojstvene vrijednosti operatora.

S obzirom na definiciju (1) predstavljalo bi izazov definirati spektar neprekidnog linearnog operatora F jednostavno s

$$\Sigma(F) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - F \text{ nije bijekcija}\}. \tag{3}$$

Ovo ćemo nazivati **preslikavajući spektar** operatora F. Preciznije mogli bismo proučavati *spektar injektivnosti*

$$\Sigma_i(F) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - F \text{ nije injekcija}\} \tag{4}$$

i *spektar surjektivnosti*

$$\Sigma_s(F) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - F \text{ nije surjekcija}\}, \tag{5}$$

pri čemu je $\Sigma(F) = \Sigma_i(F) \cup \Sigma_s(F)$. Međutim, u nelinearnom slučaju se pokazuje da ovaj pristup nije od neke koristi. Zapravo, ove jednostavne definicje imaju smisla samo u linearnom slučaju, jer tada imamo veoma rigidnu strukturu linearnosti, a također i tako moćno oruđe kao teorem o zatvorenm grafu koji garantira ograničenost inverza ograničenog operatora.

Pokazat ćemo primjerima da *preslikavajući spektar* (3) ne mora imati ni jednu od poznatih osobina linearnog spektra.

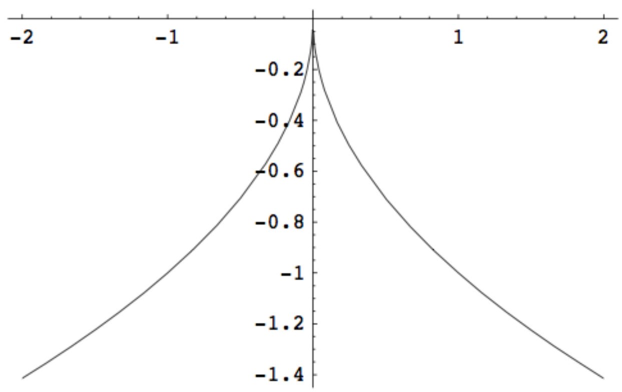
Primjer 2.1 Neka je operator $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiran s

$$F(x) = \sqrt{|x|}.$$

Odredimo spektre injektivnosti i surjektivnosti, odnosno preslikavajući spektar operatora F. Označimo $G(x) = (\lambda I - F)(x) = \lambda x - \sqrt{|x|}$.

a) Ispitajmo kad je ovo preslikavanje injektivno.

Za $\lambda = 0$ je $G(x) = -\sqrt{|x|}$, a to nije injekcija (jer za $x \neq 0$ vrijedi $G(x) = G(-x)$). Prema tome, $0 \in \Sigma_i(F)$.



Slika 1: $G(x) = -\sqrt{|x|}, (\lambda = 0)$

Neka je sada $\lambda \neq 0$ i promatrajmo jednakosti

$$G(x_1) = \lambda x_1 - \sqrt{|x_1|} = \lambda x_2 - \sqrt{|x_2|} = G(x_2)$$

$$\lambda(x_1 - x_2) = \sqrt{|x_1|} - \sqrt{|x_2|}.$$

U slučaju da su x_1 i x_2 pozitivni i $x_1 \neq x_2$, vrijedi

$$\lambda(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$$

$$\lambda(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = 1 \Rightarrow \sqrt{x_2} = \frac{1}{\lambda} - \sqrt{x_1}.$$

Iz uvjeta $\frac{1}{\lambda} - \sqrt{x_1} > 0$ dobivamo $\lambda > 0$ i $x_1 \in (0, \frac{1}{\lambda^2})$.

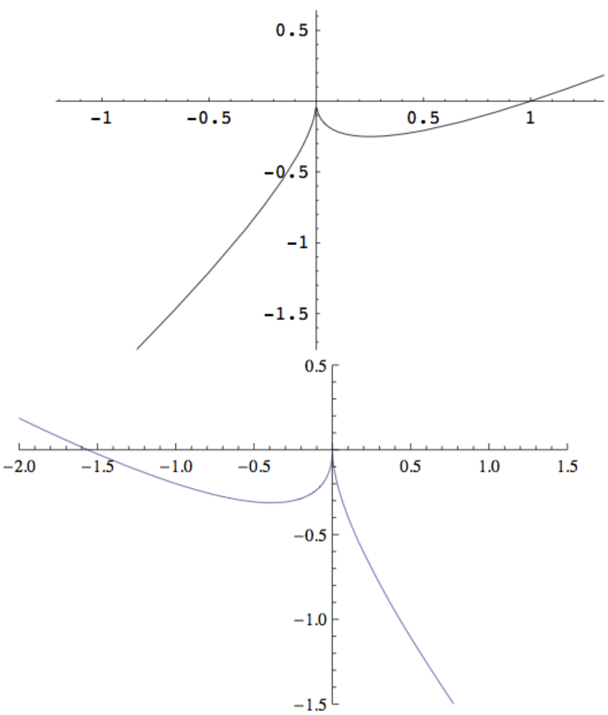
U slučaju da su x_1 i x_2 negativni i $x_1 \neq x_2$, vrijedi

$$\lambda(-\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}) = \sqrt{|x_1|} - \sqrt{|x_2|}$$

$$\lambda(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}) = -1 \Rightarrow \sqrt{|x_2|} = -\frac{1}{\lambda} - \sqrt{|x_1|}.$$

Rješavanjem nejednakosti $-\frac{1}{\lambda} - \sqrt{|x_1|} > 0$ dobivamo $\lambda < 0$ i $x_1 \in (-\frac{1}{\lambda^2}, 0)$. Ovim smo pokazali da za proizvoljno $\lambda > 0$, ako uzmemo $x_1 \in (0, \frac{1}{\lambda^2})$ i $x_2 = (\frac{1}{\lambda} - \sqrt{x_1})^2$, onda dobivamo $G(x_1) = G(x_2)$. To znači da za $\lambda \in (0, \infty)$ preslikavanje G nije injektivno, odnosno $(0, \infty) \subseteq \Sigma_i(F)$. S druge strane, za proizvoljno $\lambda < 0$, ako uzmemo $x_1 \in (-\frac{1}{\lambda^2}, 0)$ i $x_2 = -(\frac{1}{\lambda} + \sqrt{|x_1|})^2$, onda opet dobivamo $G(x_1) = G(x_2)$. Dakle, $(-\infty, 0) \subseteq \Sigma_i(F)$. Sveukupno, našli smo spektar injektivnosti

$$\Sigma_i(F) = (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, \infty) = \mathbb{R}$$



Slika 2: $G(x)$ za $\lambda = 1$ i $\lambda = 0.8$

b) Ispitajmo kad je G surjektivno preslikavanje.
Za $\lambda = 0$ je $G(x) = -\sqrt{|x|}$, a ovo nije surjekcija jer je $G(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$. Prema tome, $0 \in \Sigma_s(F)$. Neka je sad $\lambda \neq 0$ i $y \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Ispitajmo rješenja jednadžbe

$$\lambda x - \sqrt{|x|} = y.$$

Nalazimo: za $\lambda > 0$ je

$$x = \begin{cases} \frac{1+2\lambda y+\sqrt{1+4\lambda y}}{2\lambda^2} & y \in [-\frac{1}{4\lambda}, \infty) \\ \frac{1+2\lambda y-\sqrt{1+4\lambda y}}{2\lambda^2} & y \in [-\frac{1}{4\lambda}, 0] \\ \frac{-1+2\lambda y+\sqrt{1-4\lambda y}}{2\lambda^2} & y \in (-\infty, 0] \end{cases},$$

a za $\lambda < 0$ je

$$x = \begin{cases} \frac{1+2\lambda y-\sqrt{1+4\lambda y}}{2\lambda^2} & y \in (-\infty, 0] \\ \frac{-1+2\lambda y+\sqrt{1-4\lambda y}}{2\lambda^2} & y \in [\frac{1}{4\lambda}, 0] \\ \frac{-1+2\lambda y-\sqrt{1-4\lambda y}}{2\lambda^2} & y \in [\frac{1}{4\lambda}, \infty) \end{cases} .$$

Tako da za $\lambda \neq 0$ i proizvoljno y, postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = y$; odnosno G je surjekcija. Ostaje samo $\Sigma_s(F) = \{0\}$. Preslikavajući spektar je

$$\Sigma(F) = \Sigma_i(F) \cup \Sigma_s(F) = \mathbb{R},$$

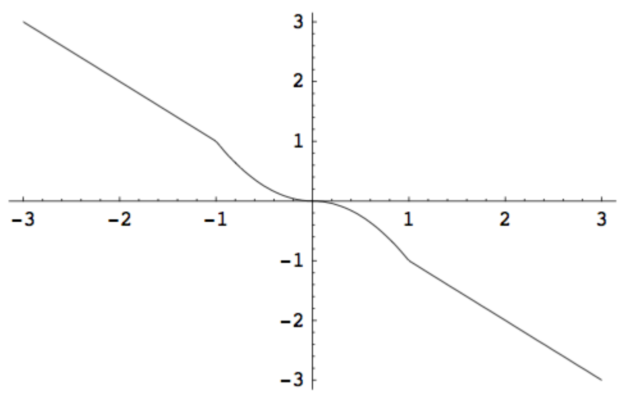
pa vidimo da **nije ograničen skup**.
Primjer 2.2 Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiran s

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{ako je } |x| > 1, \\ x^2 & \text{ako je } 0 \leq x \leq 1, \\ -x^2 & \text{ako je } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \tag{6}$$

U slučaju da je $\lambda = 0$, promatrajmo preslikavanje

$$G(x) = -F(x) = \begin{cases} -x & \text{ako je } |x| > 1, \\ -x^2 & \text{ako je } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 & \text{ako je } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

i pokažimo da je u pitanju bijekcija (vidi sliku 2).

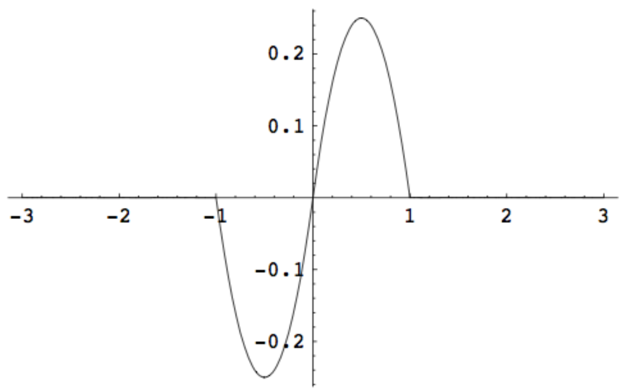


Slika 3: $G(x)$ za $\lambda = 0$

Za $y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $\exists x = -y$, tako da $G(x) = y$. Za $y \in [-1, 0]$, $\exists x = \sqrt{-y}$, tako da $G(x) = y$. I za $y \in [0, 1], \exists x = -\sqrt{y}$, $G(x) = y$. Dakle, $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pa je G surjekcija i $0 \notin \Sigma_s(F)$. Jasno je i da je injekcija jer iz svake jednadžbe $G(x_1) = G(x_2)$ slijedi da je $x_1 = x_2$. Injektivnost se može dokazati i činjenicom da je G neprekidna i stalno opadajuća funkcija od $+\infty$ do $-\infty$ na čitavoj realnoj osi. Dakle, $0 \notin \Sigma_i(F)$. Kad je $\lambda = 1$ imamo:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } |x| > 1, \\ x - x^2 & \text{ako je } 0 \leq x \leq 1, \\ x + x^2 & \text{ako je } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

$G_{max} = G(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, a $G_{min} = G(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ (vidi sliku 2).



Slika 4: $G(x)$ za $\lambda = 1$

Budući da je G neprekidna funkcija, vrijedi $G(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, pa nije surjekcija i $1 \in \Sigma_s(F)$. Jasno je da G nije ni injekcija jer npr. $G(2) = G(3) = 0$. Prema tome, $1 \in \Sigma_i(F)$. Neka je $\lambda \in (0, 1)$ (vidi sliku 2). Tada

$$G(x) = \begin{cases} x(\lambda - 1) & \text{ako je } |x| > 1, \\ \lambda x - x^2 & \text{ako je } 0 \leq x \leq 1, \\ \lambda x + x^2 & \text{ako je } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad G'(x) = \begin{cases} \lambda - 1 & \text{ako je } |x| > 1, \\ \lambda - 2x & \text{ako je } 0 \leq x \leq 1, \\ \lambda + 2x & \text{ako je } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} . \tag{7}$$

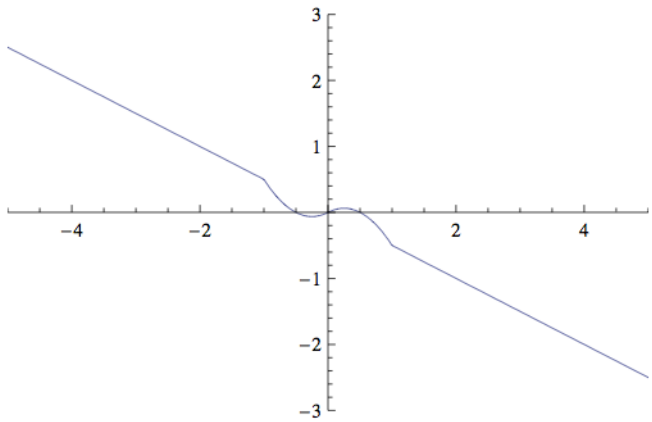
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\lambda/2)$	$(-\lambda/2, 0)$	$(0, \lambda/2)$	$(\lambda/2, 1)$	$(1, \infty)$
$G'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$G(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Budući da je G neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ i dostiže lokalni minimum za $x = -\frac{\lambda}{2}$, a lokalni maksimum za $x = \frac{\lambda}{2}$, slijedi da nije injekcija. Tako npr. za $x_1 \in (0, \frac{\lambda}{2})$ i $x_2 \in (\frac{\lambda}{2}, 1)$, iz jednadžbe $G(x_1) = G(x_2)$ dobivamo $x_2 = \lambda - x_1$. Ovim smo pokazali $(0, 1) \subseteq \Sigma_i(F)$.

Jasno je da je G surjekcija jer je neprekidna funkcija i

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} G(x) = -\infty.$$

U slučaju $\lambda \in (1, 2)$ je



Slika 5: $G(x)$ za $\lambda = \frac{1}{2}$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,-\lambda/2)$	$(-\lambda/2,0)$	$(0,\lambda/2)$	$(\lambda/2,1)$	$(1,\infty)$
$G`(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$G(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

tako da opet nemamo injekciju, pa $(1,2) \subseteq \Sigma_i(F)$. Sada je

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$$

pa G jest surjekcija. Iz (7) slijedi: za $\lambda \geq 2$ je $G'(x) > 0$, te G stalno raste od $-\infty$ do $+\infty$; a za $\lambda < 0$ je $G'(x) < 0$, pa G stalno opada od $+\infty$ do $-\infty$ na čitavoj realnoj osi. Ovo znači, zbog neprekidnosti, da je za ovakve λ preslikavanje G bijekcija. Našli smo, konačno, spektre:

$$\Sigma_i(F) = \Sigma(F) = (0,2), \qquad \Sigma_s(F) = \{1\}.$$

Dakle, $\Sigma(F)$ **nije zatvoren skup**.

Jedna od najvažnijih osobina linearnog spektra je ta da je on uvijek neprazan u slučaju kad je $\mathbb{K}$ polje kompleksnih brojeva. Međutim, pokazuje se da ovo više ne vrijedi kad je riječ o nelinearnom operatoru.

Primjer 2.3 Neka je operator $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definiran s

$$F(z,w) = (\overline{w}, i\overline{z}). \tag{8}$$

Tada je preslikavanje $(\lambda I - F)(z,w) = (\lambda w - i\overline{z})$, za svako $\lambda \in \mathbb{C}$, bijekcija na $\mathbb{C}^2$ s inverzom

$$(\lambda I - F)^{-1}(\zeta,\omega) = \left(\frac{\overline{\lambda}\zeta + \overline{\omega}}{i + |\lambda|^2}, -\frac{\overline{\lambda}\omega + i\overline{\zeta}}{i - |\lambda|^2}\right).$$

Slijedi da je:

$$\Sigma_i(F) = \Sigma_s(F) = \Sigma(F) = \emptyset.$$

Prema tome preslikavajući spektar ovog nelinearnog operatora (9) je **prazan skup**.

Primjer 2.4 Neka je operator $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiran s

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x \leq 1, \\ x - 1 & \text{ako je } 1 < x < 2, \\ 1 & \text{ako je } x \geq 2. \end{cases} \tag{9}$$

Nije teško pokazati da je spektar $\Sigma(F) = [0, 1]$. Za polinom $p(z) = z^2$ vrijedi $p(\Sigma(F)) = [0, 1]$. S druge strane, iz činjenice da je $F^2(x) \equiv 0$ slijedi da je $\Sigma(p(F)) = \Sigma(F^2) = \{0\}$. Ovaj primjer pokazuje da **ne vrijedi formula spektralnog preslikavanja** (2).

Spektar injektivnosti (4) tijesno je povezan s **točkovnim spektrom**

$$\sigma_p(F) := \{\lambda \in \mathbb{K} : F(x) = \lambda x \text{ za neko } x \neq 0\}.$$

Kao i u linearnom slučaju, elemente $\lambda \in \sigma_p(F)$ nazivat ćemo *svojstvenim vrijednostima* operatora F. U slučaju da je $F(0) = 0$, vrijedi inkluzija

$$\sigma_p(F) \subseteq \Sigma_i(F)$$

koja može biti i stroga. U Primjeru 2.1 imamo da je $\sigma_p(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} = \Sigma_i(F)$. Naravno, za linearne operatore L uvijek vrijedi da je $\sigma_p(L) = \sigma_i(L)$, po definiciji.

Pogledajmo sad spektar surjektivnosti (5). Za $z \in X$ definiramo translaciju F_z operatora F s

$$F_z(x) = F(x) + z \tag{10}$$

Sljedeći rezultat daje nam vezu između spektra surjektivnosti $\Sigma_s(F)$ i točkovnog spektra $\sigma_p(F_z)$ svih translacija (10).

Propozicija 2.1. *Za neprekidan operator $F : X \to X$ vrijedi jednakost*

$$\mathbb{K} \setminus \Sigma_s(F) = \bigcap_{z \in X \setminus \{-F(0)\}} \sigma_p(F_z). \tag{11}$$

Dokaz. (i) Pokažimo najprije da

$$\bigcap_{z \in X \setminus \{-F(0)\}} \sigma_p(F_z) \subseteq \mathbb{K} \setminus \Sigma_s(F).$$

Neka za svako $z \neq -F(0)$ vrijedi $\lambda \in \sigma_p(F_z)$. Tada:

$$(\exists x_z \neq 0) \lambda x_z = F_z(x_z) = F(x_z) + z \Rightarrow (\lambda I - F)(x_z) = z,$$

što znači da $z \in R(\lambda I - F)$. Dakle, $\forall z \in X \setminus -F(0), z \in R(\lambda I - F)$, pa $R(\lambda I - F) \supseteq X \setminus -F(0)$. Budući da još, očito, vrijedi i $-F(0) \in R(\lambda I - F)$, imamo: $R(\lambda I - F) \supseteq X$. Svakako je $R(\lambda I - F) \subseteq X$, pa $R(\lambda I - F) = X$. Dakle $\lambda I - F$ je surjektivno preslikavanje, tj. $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \Sigma_s(F)$.

(ii) Neka je sada $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \Sigma_s(F)$, tj. $\lambda I - F$ je surjektivno, te vrijedi: $(\forall z \in X)(\exists x_z \in X)\lambda x_z - F(x_z) = z$. Ako $z \neq -F(0)$, onda $x_z \neq 0$, a to znači da je $x = x_z$ netrivijalno rješenje jednadžbe $F_z(x) = \lambda x$. Prema tome, $\lambda \in \sigma_p(F_z)$. Budući da ovo vrijedi $\forall z \in X \setminus -F(0)$, onda je

$$\lambda \in \bigcap_{z \in X \setminus \{-F(0)\}} \sigma_p(F_z).$$

Dakle,

$$\mathbb{K} \setminus \Sigma_s(F) \subseteq \bigcap_{z \in X \setminus \{-F(0)\}} \sigma_p(F_z).$$

Na osnovi pokazanog u (i) i (ii) slijedi tražena jednakost. □

Za $F(x) = \sqrt{|x|}$ iz Primjera 2.1, translatirana funkcija je $F_z(x) = \sqrt{|x|} + z$. Budući da je za svako $z \in \mathbb{R}$ točkovni spektar $\sigma_p(F_z) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, na osnovi (11) slijedi da je $\Sigma_s(F) = \{0\}$.

Primjer 2.5 U prostoru neprekidnih funkcija $C[0,1]$ dan je Hammersteinov integralni operator

$$H(x)(s) = s^{\beta+1} \int_0^1 t^\beta \sin x(t) dt \qquad (0 \leq s \leq 1, \beta \geq 0).$$

Operator H je kompozicija $H = KF$, nelinearnog operatora F definiranog s

$$F(x)(t) = \sin x(t)$$

i linearnog Fredholmova integralnog operatora

$$Ky(s) = \int_0^1 s^{\beta+1} t^\beta y(t) dt.$$

Odredimo točkovni spektar $\sigma_p(H)$. Operator H je kompaktan. Za neprekidnu funkciju $x_n(t) \equiv n\pi \equiv 0$, pa $H(x_n) = 0 = 0x_n$. To znači da $0 \in \sigma_p(H)$. Razmotrimo sad jednadžbu $H(x) = \lambda x$, za $\lambda \neq 0$. Imamo

$$H(x)(s) = s^{\beta+1} \int_0^1 t^\beta \sin x(t) dt = \lambda x(s)$$

$$x(s) = cs^{\beta+1} \text{ za neko } c \neq 0.$$

$$\lambda = \frac{1}{c} \int_0^1 t^\beta \sin(ct^{\beta+1}) dt =: \psi(c). \tag{12}$$

Vrijedi i obrnuto, svaka funkcija $x(t) = ct^{\beta+1}$, $c \neq 0$ je svojstvena funkcija operatora H koja odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = \psi(c)$. Prema tome,

$$\sigma_p(H) = \{\psi(c) : c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Uvedimo u (12) zamjenu varijabli $ct^{\beta+1}=\tau$ $dt=\frac{1}{\beta+1}c^{-\frac{1}{\beta+1}}\tau^{-\frac{\beta}{\beta+1}}d\tau$, pa dobivamo

$$\lambda=\psi(c)=\frac{1}{(\beta+1)c^2}\int_0^c \sin\tau d\tau=\frac{1-\cos c}{(\beta+1)c^2}\quad (c\neq 0).$$

Sada je

$$\lim_{c\to 0}\psi(c)=\lim_{c\to 0}\frac{1-\cos c}{(\beta+1)c^2}=\lim_{c\to 0}\quad\frac{\sin c}{2(\beta+1)c}=\frac{1}{2(\beta+1)}.$$

Možemo dodefinirati funkciju ψ u točki 0 tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}$:

$$\widetilde{\psi}(c)=\begin{cases}\frac{1-\cos c}{(\beta+1)c^2} & c\neq 0,\\ \frac{1}{2(\beta+1)} & c=0.\end{cases}$$

Budući da je funkcija $\widetilde{\psi}$ neprekidna, vrijedi

$$0\leq\widetilde{\psi}(c)\leq\frac{1}{2(\beta+1)},\quad(-\infty<c<\infty),$$

pri čemu se dostižu sve vrijednosti između lijeve i desne granice. Lijeva strana nejednakosti dostiže se u točkama $c=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, tj. $\psi(2k\pi)=0$. Desna strana nejednakosti ne dobiva se ni za jedno $c\neq 0$, jer iz $\psi(c)=\frac{1}{2(\beta+1)}$ slijedi

$$\frac{1}{2(\beta+1)}=\frac{1-\cos c}{(\beta+1)c^2}=\frac{2\sin^2(\frac{c}{2})}{(\beta+1)c^2}=\frac{1}{2(\beta+1)}\Big(\frac{\sin\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}}\Big)^2,$$

$$\sin\frac{c}{2}=\frac{c}{2}\Rightarrow c=0.$$

Prema tome $\sigma_p(H)=\Big[0,\frac{1}{2(\beta+1)}\Big)$.

3 Zaključak

Ovim primjerima pokazali smo da nam treba drugačiji pristup pri definiranju spektra nelinearnih operatora. Za nelinearni neprekidni operator F i neku klasu neprekidnih operatora $\mathcal{M}(X)$ koja sadržava F možemo definirati rezolventni skup

$$\rho(F)=\Big\{\lambda\in\mathbb{K}:\lambda I-F\text{ je bijekcija i }(\lambda I-F)^{-1}\in\mathcal{M}(X)\Big\}$$

i spektar

$$\sigma(F)=\mathbb{K}\setminus\rho(F).$$

Ovisno o tome što uzmemo za klasu $\mathcal{M}(X)$ (npr. neprekidno diferencijabilni, Lipschitz neprekidni, stabilno rješivi ili epi operatori) dobivamo razne spektre. Nazive su dobivali po matematičarima koji su ih prvi uveli: Rhodius, Neuberger, Kachurovski, Feng, itd. Na ovaj način dobivaju se spektri koji imaju samo neke dobre osobine koje imaju spektri linearnog operatora. Nelinearne spektralne teorije i dalje su u razvoju, a opseg njihove primjene vrlo je širok.

Literatura

[1] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[2] J. Appell, E. Pascale and A. Vignoli, *Nonlinear Spectral Theory*, Walter de Gruyter Berlin, New York, 2004

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

Sanela Halilović i Samra Pirić: Viši asistenti na Odsjeku Matematika, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Tuzli, Univerzitetska 4, 75 000 Tuzla, E-mail: *sanela.halilovic@untz.ba* ; *samra.piric@untz.ba*